La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas : la modélisation des connaissances des élèves

Hamid Chaachoua

UNIVERSITE JOSEPH FOURIER – GRENOBLE I

Hamid CHAACHOUA
Maître de Conférences

LA PRAXEOLOGIE COMME MODELE DIDACTIQUE POUR LA PROBLEMATIQUE EIAH. ETUDE DE CAS : LA MODELISATION DES CONNAISSANCES DES ELEVES

Note de synthèse pour une
Habilitation à Diriger des Recherches

Soutenue le 29 octobre 2010

Devant le jury :

Marianna, BOSCH, Professeur, Université Ramon Llull, Barcelone, Rapporteur
Yves CHEVALLARD, Professeur, Université de Provence, Rapporteur
Colette LABORDE, Professeur, Université Joseph Fourier, Grenoble, Examinatrice
Maggy SCHNEIDER, Professeur, Université de Liège, Examinatrice
Pierre TCHOUNIKINE, Professeur, Université Joseph Fourier, Grenoble, Président
Carl WINSLOW, Professeur, Université de Copenhague, Rapporteur

A Yasmina, Samy et Dina

Remerciements

Je remercie Marianna BOSCH, Professeur, Université Ramon Llull, Barcelone, Yves CHEVALLARD, Professeur des Universités à l'IUFM de Marseille, et Carl WINSLOW, Professeur, Université de Copenhague, d'avoir rapporté sur mon travail .

Je remercie Pierre TCHOUNIKINE, Professeur, Université Joseph Fourier, d'avoir présidé le jury.

Je remercie aussi Colette LABORDE, Professeur, Université Joseph Fourier, et Maggy SCHNEIDER, Professeur, Université de Liège, d'avoir fait partie du jury de soutenance.

J'exprime ma reconnaissance à Jean-François Nicaud de m'avoir invité à rejoindre le projet Aplusix et pour les différents projets que nous avons conduit ensemble avec Denis Bouhineau, Marilena Bittar et Marie-Caroline Croset.

Je remercie Annie Bessot et Claude Comiti pour les différents échanges sur mon travail et pour leur soutien moral. Enfin, tous les membres de l'équipe MeTAH.

Mes remerciements vont aussi à ma famille et mes amis

Table des matières

A – INTRODUCTION

Dans cette introduction je présenterai synthèse de mes recherches depuis mon doctorat avant de présenter ma note de synthèse.

I. SYNTHESE DE MES RECHERCHES

Après le doctorat (Chaachoua H., 1997), j'ai orienté ma recherche vers la modélisation didactique et informatique des connaissances des élèves et les usages des environnements informatiques dans l'enseignement des mathématiques. Cette recherche se place à la charnière de deux problématiques : celle de la didactique des mathématiques et celle des environnements informatiques pour l'apprentissage humain (EIAH).

Dans la suite, je présente une synthèse de mes recherches autour de deux axes.

I.1. Axe 1 : Modélisation didactique et informatique des connaissances des élèves

Mes premières recherches sur cet axe portaient uniquement sur la modélisation didactique des connaissances dans le domaine des équations différentielles. D'abord, dans le cadre de la thèse de Arslan (Arslan, 2005), nous nous sommes intéressés à la modélisation des connaissances des élèves de la classe de terminale en s'appuyant sur un modèle didactique, celui des conceptions selon l'approche CKC (Balacheff, 2003). Cette recherche étudie, en adoptant des approches épistémologique, cognitive et didactique, les conditions de conceptualisation des équations différentielles (Arslan, Chaachoua, & Laborde, 2004). En particulier, cette thèse a montré par la réalisation d'une ingénierie didactique qu'on peut introduire les équations différentielles par une approche qualitative en classe de Terminale.

Sur le même thème, j'ai encadré la thèse de Saglam (Saglam, 2004) qui a étudié l'enseignement et l'apprentissage des équations différentielles au premier cycle universitaire en mathématiques et en physique (Saglam, Chaachoua, & Lacroix, 2004). Une partie de cette recherche portait sur la modélisation des connaissances des étudiants en utilisant le modèle des praxéologies issu de la Théorie de l'Anthropologie Didactique (TAD) (Chevallard, 1992). Une autre partie de cette thèse portait sur la modélisation en mathématiques et en physique en tant que disciplines enseignées (Chaachoua & Saglam, 2004) (Chaachoua & Saglam, 2005).

Depuis septembre 2002, je m'intéresse à un autre domaine de connaissance celui de l'algèbre, mais en s'inscrivant dans la problématique des EIAH où j'étudie la modélisation didactique et informatique des connaissances des élèves de l'enseignement secondaire. Cette recherche s'inscrit dans le cadre du projet Aplusix (http://aplusix.imag.fr/) et s'appuie sur le logiciel Aplusix. Je m'intéresse à la modélisation de la connaissance : au sens du contenu à enseigner, connaissances de l'apprenant qui seront au moins prises en compte pour permettre d'assurer des interactions pertinentes au regard de l'apprentissage visé, mais aussi connaissances à l'interface des systèmes comme lieu privilégié des interactions.

J'ai construit un modèle didactique pour décrire le comportement des élèves dans la résolution des équations de degré 1. Ce modèle permet de faire un diagnostic en termes de conceptions à partir des actions élémentaires de l'élève. Ce choix a été fait pour que le modèle soit computationnel, ce qui a permis d'automatiser le mécanisme de diagnostic de ces conceptions.

On a utilisé le logiciel Aplusix comme moyen de recueil des productions des élèves et qui permet d'enregistrer toutes les actions des élèves. Une base de règles correctes et erronées a été mise en place et un interpréteur de règles a été réalisé développé dans Anaïs par Jean-François Nicaud. Ce logiciel permet de faire un diagnostic local de transformations des élèves à partir desquels il fournit les conceptions des élèves selon le modèle que j'ai élaboré (Chaachoua, Croset, Bouhineau, Bittar, & Nicaud, 2007). La confrontation entre le diagnostic automatique et manuel nous a permis de valider le processus de diagnostic automatique. Ensuite, nous avons utilisé ce diagnostic automatique sur les protocoles d'élèves issus de différentes expérimentations réalisées en France et au Brésil sur une base de plus de 2000 élèves (Nicaud, Bittar, Chaachoua, Inamdar, & Maffei, 2006). Cette première étape a été réalisée dans le cadre du projet Cognitique (Nicaud & al., 2005).

J'ai élargit cette recherche à d'autres domaines de l'algèbre, comme la résolution des équations de degré 2, la factorisation, la réduction…, en adoptant le modèle de praxéologies comme modèle didactique. Ceci, a été fait d'abord dans le cadre de la thèse de Nguyen (Nguyen, Les apports d'une analyse didactique comparative de la résolution des équations du second degré dans l'enseignement secondaire au Vietnam et en France., 2006) sur la notion des équations de degré 2, mais uniquement au niveau de la modélisation didactique et ensuite dans le cadre de la thèse de Marie-Caroline Croset (Croset M. , 2009). Dans cette dernière, la recherche porte aussi bien sur la modélisation didactique qu'informatique sur les thèmes de factorisation et réduction.

I.2. Axe 2 : Conception et usage des scénarios et des ressources pédagogiques pour l'apprentissage d'algèbre dans un environnement informatique

Dans une approche constructiviste de l'apprentissage, on considère que l'élève apprend en s'adaptant à un milieu caractérisé par les types d'actions et de rétroactions qu'il offre. La construction de la connaissance est le résultat de l'interaction du sujet avec ce milieu. Celui-ci doit être organisé par l'enseignant par des choix judicieux de problèmes, les types d'actions possibles de l'élève sur le milieu et les types de rétroactions du milieu. Les environnements informatiques peuvent constituer, sous certaines conditions, un milieu d'apprentissage au sens ci-dessus. J'ai mené plusieurs recherches dans cet axe :

- J'ai élaboré des cartes d'exercices générés automatiquement à partir des coefficients tires au sort (Bouhineau, Chaachoua, & Nicaud, 2008). Cette conception s'appuie sur un découpage et un groupement des exercices selon des organisations mathématiques (au sens de Chevallard (Chevallard, 1999a)) qui sont conformes à l'enseignement secondaire d'une part et répondant à des choix didactiques d'autre part.
- Dans le cadre du projet européen ReMATH (http://remath.cti.gr/default_remath.asp) j'ai participé à l'élaboration du cahier des charges de conception d'une nouvelle représentation des expressions algébriques par les arbres dans Aplusix.

II. PRESENTATION DE MA NOTE DE SYNTHESE

Mon projet HDR porte sur la modélisation didactique et informatique des connaissances des élèves (axe 1 présenté ci-dessus). Je montrerai, à partir des travaux en cours, l'élaboration d'un modèle basé sur des concepts de la théorie anthropologique du didactique, en particulier sur l'approche praxéologique, pour la modélisation de l'apprenant dans un EIAH.

En fait, l'élaboration de ce modèle, présenté dans la partie D, est l'aboutissement de deux types de travaux : modélisation des connaissances d'un sujet au sein de la TAD qui sera présentée dans la partie B, et la modélisation de l'apprenant, par des praxéologies, dans un EIAH qui sera présentée dans la partie C.

Pourquoi le choix de la TAD

Trois raisons m'ont motivé à se placer dans la théorie TAD.

- La première est de disposer d'un même modèle pour décrire les attentes d'une institution I et les activités de l'élève en tant que sujet de I. Or, la TAD nous propose le modèle praxéologique pour décrire l'organisation du savoir au sein d'une institution, les activités des sujets attendues par l'institution. Notre travail a consisté à intégrer dans cette approche les comportements non attendues par l'institution, en particulier les erreurs des élèves. (partie B)
- La deuxième est que le modèle praxéologique me semble adéquat pour une implémentation informatique et donc à une modélisation informatique des connaissances. (partie C)
- La troisième est que ce modèle, peut servir à d'autres problématiques EIAH comme les scénarios (perspectives de mes recherches).

B - PRAXEOLOGIE COMME MODELE DIDACTIQUE POUR DECRIRE LES CONNAISSANCES

Comme nous l'avons dit dans l'introduction nous souhaitons disposer d'un même modèle pour décrire les attentes d'une institution I et les activités de l'élève en tant que sujet de I. C'est ce qui nous poussé à nous placer dans le cadre théorique de la Théorie Anthropologique du Didactique que nous désignerons dans la suite par TAD. Nous ne présentons pas ici cette théorie compte tenu de l'abondante littérature la concernant : pour ne citer que les principales, nous renvoyons le lecteur à (Chevallard, 1992), (Bosch & Chevallard, 1999), (Chevallard, 1999a), (Chevallard, 1999b) et (Chevallard, 2001). Cependant, nous préciserons brièvement comment cette théorie modélise la connaissance (paragraphe I). Puis nous présenterons notre utilisation du modèle praxéologique pour décrire les praxéologies ponctuelles institutionnelles (paragraphe II) dans une étude de cas en algèbre (paragraphe III). Enfin, nous proposerons un modèle original pour décrire aussi bien les praxéologies institutionnelles que personnelles (paragraphe IV).

I. LA MODELISATION DE LA CONNAISSANCE DANS LA TAD

La prise en compte de la connaissance d'un élève dans la TAD, a été faite dès le début à l'aide de la notion de rapport au savoir. Une personne X connait un objet O si cet objet existe pour X, c'est-à-dire s'il existe un rapport personnel R(X, O) de X à O (Chevallard 1992, pp. 86-87). Ce rapport désigne le système de toutes les interactions possibles de X avec O (Chevallard, 2003) interactions constituant la connaissance qu'a X de O. Il en est de même pour une institution (Bosch & Chevallard, 1999) avec, cette fois, un rapport institutionnel RI(O) d'une institution I à un objet O.

Au cours des années 90, plusieurs travaux[1] se sont intéressés à étudier la conformité des rapports personnels des élèves avec le rapport institutionnel : (Assude, 1992) (Grugeon, 1995) (Bronner, 1997) ou des enseignants (Bronner, 1997) (Chaachoua, 1997).

Dans sa thèse, Assude (Assude, 1992) étudie l'écart entre ce que l'élève est censé apprendre et ce qu'il a effectivement appris. Dans les termes de la TAD, il s'agit d'évaluer l'écart du rapport personnel au rapport institutionnel pour l'élève relativement à l'objet étudié, ici la racine carrée. Pour l'auteur les notions des conception ou de représentation, candidats à modéliser la connaissance, ne recouvrent que partiellement le rapport personnel d'un sujet.

> « Le terme de conception (ou de représentation) renvoie en effet à une réalité supposée qui tout à la fois, excède le rapport personnel et s'inscrit en lui sans l'épuiser. Car l'étude des conceptions, en vérité, ne s'intéresse qu'à une partie du rapport personnel des sujets. » (Assude, 1992, p.4).

Pour Chevallard, la notion de rapport personnel est à la fois un concept englobant mais aussi unificateur des aspects fragmentaires sous lesquels on décrit communément la connaissance.

> « Un individu X ne peut avoir, à un objet de savoir donné, Os, qu'un rapport personnel, lequel est émergent d'un système de relations institutionnelles (telle la

1 On ne citera que quelques travaux car la liste est bien longue.

relation didactique), relations ternaires où l'individu X entre avec l'objet de savoir Os et un ou des agents de l'institution I.

De ce rapport personnel relève notamment tout ce qu'on croit ordinairement pouvoir dire - en termes de "savoir", de "savoir-faire", de "conceptions", de "compétences", de "maîtrise", d' "images mentales", de "représentations", d' "attitudes", de "fantasmes", etc…- de X à propos de Os. Tout ce qui peut être énoncé - à tort ou à raison, pertinemment ou non - doit être tenu (au mieux) pour un aspect du rapport personnel de X à Os. Le concept de rapport (personnel) apparaît comme englobant les aspects fragmentaires en lesquels on le dissocie ordinairement. » (Chevallard, 1989)

Comme le soulignent Bosch et Chevallard (Bosch & Chevallard, 1999), la notion du rapport au savoir (Chevallard[2]) inscrit la didactique dans le terrain de l'anthropologie de la connaissance (ou anthropologie cognitive). Ainsi :

« La connaissance – et le savoir comme une certaine forme d'organisation de connaissances – entre alors en scène avec la notion de rapport : un objet existe s'il existe un rapport à cet objet, c'est-à-dire si un sujet ou une institution le " (re)connaît " en tant qu'objet. Étant donné un objet (par exemple un objet de savoir) et une institution, la notion de rapport renvoie aux pratiques sociales qui se réalisent dans l'institution et qui mettent en jeu l'objet en question, soit donc à " ce qui se fait dans l'institution avec cet objet ". Connaître un objet c'est avoir à faire avec – et souvent avoir affaire à – cet objet.

Le savoir mathématique, en tant que forme particulière de connaissance, est donc le fruit de l'action humaine institutionnelle : c'est quelque chose qui se produit, s'utilise, s'enseigne ou, plus généralement, se transpose dans des institutions. Mais le mathématique reste encore un terme primitif, hypostase de certaines pratiques institutionnelles – les pratiques sociales à mathématiques. Ce qui fait défaut, c'est l'élaboration d'une méthode d'analyse des pratiques institutionnelles qui en permette la description et l'étude des conditions de réalisation. Les derniers développements de la théorisation viennent combler ce manque. La notion clé qui apparaît alors est celle d'organisation praxéologique ou praxéologie. » (Bosch & Chevallard, 1999, p.85).

Ainsi, pour décrire le rapport institutionnel qui contraint le rapport personnel d'un sujet à un objet de savoir, la théorie propose le modèle de praxéologie :

« le rapport institutionnel à un objet, pour une position institutionnelle donnée, est façonné et refaçonné par l'ensemble des tâches que doivent accomplir, par des techniques déterminées, les personnes occupant cette position. C'est ainsi l'accomplissement des différentes tâches que la personne se voit conduite à réaliser tout au long de sa vie dans les différentes institutions dont elle est le sujet successivement ou simultanément qui conduira à faire émerger son rapport personnel à l'objet considéré. » (Bosch & Chevallard, 1999).

La théorie anthropologique du didactique considère que, *en dernière instance*, toute activité humaine consiste à *accomplir une tâche* t d'un certain *type* T, *au moyen* d'une

---

2 Chevallard (1989) et (1992) .

technique τ, justifié par une *technologie* θ qui permet en même temps de la *penser*, voire de la *produire*, et qui a son tour est *justifiable* par une *théorie* Θ.

En bref, elle part du postulat que toute activité humaine *met en œuvre* une organisation que Chevallard (1998) note [T/τ/θ/Θ] et qu'il nomme *praxéologie*, ou *organisation praxéologique*. [T / τ] étant *la pratique* – ou encore le *savoir-faire* ; [θ / Θ] le *logos* – ou encore le *savoir*.

On parle de *praxéologie mathématique* – ou d'organisation mathématique – lorsque les types de tâches *T* relèvent des mathématiques, de *praxéologie didactique* – ou d'organisation didactique – lorsque les types de tâches *T* sont des types de tâches d'étude.

Généralement, en une institution I donnée, une théorie Θ répond de plusieurs technologies θ_j, dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles plusieurs techniques τ_{ij} correspondant à autant de types de tâches T_{ij}. Les organisations ponctuelles vont ainsi s'agréger, d'abord en organisation locales, [$T_i/\tau_i/\theta/\Theta$], centrées sur une technologie θ déterminée, ensuite en organisations régionales, [$T_{ij}/\tau_{ij}/\theta/\Theta$], formées autour d'une théorie Θ. Au-delà, Chevallard (Chevallard, 1999a) nomme organisation globale le complexe praxéologique [$T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta/\Theta$] obtenu, dans une institution donnée, par l'agrégation de plusieurs organisations régionales correspondant à plusieurs théories Θ_k.

Depuis son introduction dans la TAD, la notion de praxéologie a été utilisée dans plusieurs travaux, comme (Doan Huu, 2001) (Ravel, 2003) (Saglam, 2004) (Tran Luong, 2006)[3], pour caractériser le rapport institutionnel, pour déterminer l'organisation mathématique de référence (cf. plus loin le paragraphe II) ou pour étudier les organisations didactiques. Mais, dans ces travaux la modélisation praxéologique n'est jamais utilisée pour décrire le rapport personnel des élèves.

Dès l'encadrement de la thèse de Nguyen (Nguyen Ai , 2006), nous avons tenté d'utiliser le modèle praxéologique pour analyser les productions des élèves. Ce modèle nous a permis de caractériser le rapport institutionnel en position d'élève à partir de l'analyse des erreurs qu'ils commettent, analyse effectuée en relation avec les techniques qu'ils mettent en œuvre pour résoudre algébriquement les équations du second degré (Nguyen, Chaachoua, & Comiti, 2007). Dans sa thèse Croset (Croset, 2009) prolonge ce travail : elle introduit la notion de *praxéologie-en-acte* pour analyser et décrire les connaissances des élèves. C'est ce que nous proposons de reprendre dans ce document en l'inscrivant dans un cadre plus général.

II. DESCRIPTION DES PRAXEOLOGIES INSTITUTIONNELLES : PREMIERE APPROCHE

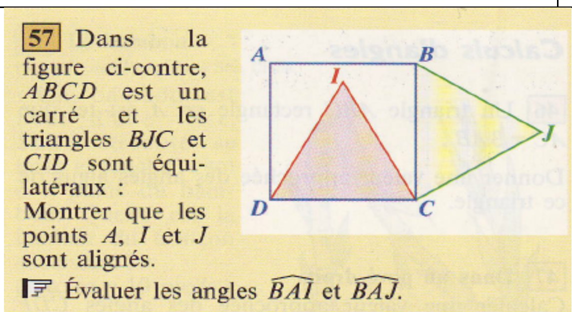
Comme le précise (Bosch & Gascon, 2004) l'organisation mathématique à enseigner constitue un modèle praxéologique du curriculum mathématiques qui est obtenu à partir des programmes et les manuels. L'identification de ces OM à enseigner passe par la caractérisation du type de tâches institutionnel qui est une « re »construction du chercheur à partir de l'analyse des manuels et des programmes. Notons que le chercheur peut procéder à un autre découpage que celui de l'institution voire le compléter pour des raisons liées à sa problématique. Il s'agit de construire une OM de référence (Bosch & Gascon, 2004). Dans notre étude, la construction d'une telle OM de référence doit prendre en compte les praxéologies institutionnelles.

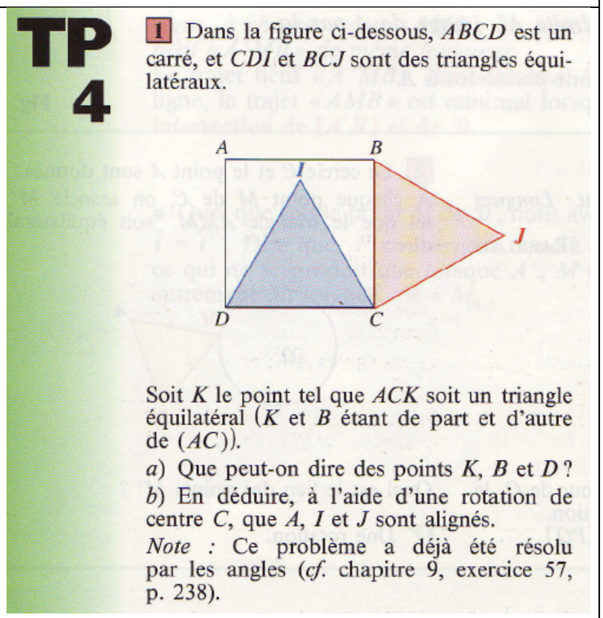
3 Bien entendu, la liste n'est pas exhaustive

Castella (Castela, 2008) a définit la notion de *Tâche prescrite* à l'élève par un couple associant l'énoncé et le contexte institutionnel de prescription. Ce dernier précise les éléments du contexte dans lequel la tâche est prescrite : Quels sont les savoirs déjà institutionnalisés ? Quels sont les problèmes déjà résolus ? L'énoncé est-il posé dans le cadre d'un chapitre précis ? Certaines techniques sont-elles usuellement associées à certains éléments, configurations ou autres ostensifs par exemple ?

Ce point de vue nous semble pertinent car le choix d'une technique et sa mise en œuvre par l'élève dépendra des éléments de ce contexte. En d'autres termes, on peut expliquer le choix de la technique par l'élève à partir des éléments de ce contexte. La détermination de ce contexte nécessite la connaissance de ce qui se fait dans l'institution classe de l'élève par exemple mais aussi ce que l'élève a fait précédemment. Or, dans une perspective d'un diagnostic automatique, on souhaite construire un modèle qui ne prend pas en compte les conditions spécifiques d'une classe donnée. En revanche, on peut intégrer dans le contexte institutionnel des éléments relatifs à une classe générique qui correspond à un niveau donné.

Nous associons à une tâche prescrite dans I une tâche mathématique. Elle correspond au problème mathématique sans aucune indication sur la technique possible ou attendue et avec une formulation qui reste le plus neutre possible vis à vis de la technique. L'énoncé est une mise en texte de la tâche mathématique en ajoutant éventuellement des indications ou des questions qui prennent en charge partiellement ou complètement les étapes de la technique attendue. Les indications peuvent être sous forme de couleurs ajoutées à des éléments d'un dessin pour mettre en évidence une configuration donnée et augmenter l'appréhension perceptive du dessin au sens de Duval (Duval, 1994). Ainsi, dans notre analyse, la tâche mathématique est regardée par rapport aux organisations mathématiques dans I sans prendre en compte les intentions didactiques que peut avoir un enseignant ou un manuel en prescrivant une tâche à l'élève. Ainsi, ce qu'on trouve dans les manuels et ce que proposent les enseignants ce sont des tâches prescrites à partir desquels, le chercheur construit la tâche mathématique. Considérons les deux exercices :

<table>
<tr><th>Exercice 1 : « Terracher, Seconde, 1994, p. 238</th><th>Exercice 2 : « Terracher, Seconde, 1994, p. 339 »</th></tr>
<tr><td>

57 Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré et les triangles BJC et CID sont équilatéraux :
Montrer que les points A, I et J sont alignés.
☞ Évaluer les angles $\widehat{BAI}$ et $\widehat{BAJ}$.

</td><td>

TP 4
1 Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un carré, et CDI et BCJ sont des triangles équilatéraux.
Soit K le point tel que ACK soit un triangle équilatéral (K et B étant de part et d'autre de (AC)).
a) Que peut-on dire des points K, B et D ?
b) En déduire, à l'aide d'une rotation de centre C, que A, I et J sont alignés.
Note : Ce problème a déjà été résolu par les angles (*cf.* chapitre 9, exercice 57, p. 238).

</td></tr>
</table>

Figure 1 : Problème d'alignement

Nous avons deux énoncés des tâches prescrites dans un même manuel. Chacun indique la technique attendue[4]. On peut leur associer la même tâche mathématique :

Soit ABCD un carré, BJC un triangle équilatéral extérieur au carré et CID un triangle équilatéral intérieur au carré. Montrer que les points A, I et J sont alignés.

Dans le modèle praxéologique, les tâches sont regroupées autour d'un type de tâches T qui peuvent être accomplies au moyen d'une technique. Se pose alors la question de la délimitation des tâches comme le souligne (Bosch & Chevallard, 1999) « le problème de la délimitation des tâches dans une pratique institutionnelle donnée reste ouvert et variera selon que l'on adopte le point de vue de l'institution où se déroule la pratique ou bien celui d'une institution extérieure d'où l'on observe l'activité et pour la décrire dans un but précis ».

Du point de vue de l'institution, les types de tâches sont souvent définis par le type de réponse attendue et plus précisément, par des caractéristiques de la réponse. Par exemple le type de tâches T* « montrer que deux droites sont parallèles dans une configuration » renvoie à un genre de tâche « montrer » qui impose que la réponse doit respecter les règles de la démonstration, en particulier, les règles du raisonnement déductif. De plus, ce raisonnement doit permettre de conclure que les droites sont parallèles. Cette caractérisation de la réponse par la définition de la tâche est déterminante pour le choix et la mise en œuvre de la technique mais elle n'est pas suffisante. En effet, en fonction de la nature de la configuration et des hypothèses du problème, plusieurs techniques peuvent être associées générant des technologies différentes. Faut-il introduire ces éléments dans la définition du type de tâches et définir ainsi plusieurs type de tâches associées à T* ? Il s'agit donc de définir un niveau de granularité dans la délimitation des types de tâche. Ce travail ne peut se faire sans intégrer les techniques, qui peuvent accomplir ces tâches. Un premier principe est que le type de tâches T regroupe les tâches qui peuvent être accomplies par une même technique τ, justifiée par une technologie θ qui elle même justifiée par une théorie Θ. Le quadruplet $[T/\tau/\theta/\Theta]$, constitue une praxéologie ponctuelle, « ce dernier qualificatif signifiant qu'il s'agit d'une praxéologie relative à un unique type de tâches » (Chevallard, 1999a). Soulignons que pour un même type de tâche, il peut exister plusieurs techniques dont certaines peuvent être plus efficaces que d'autres selon le type de tâches proposé. Par exemple, le type de problème « montrer l'alignement de trois points » possède plusieurs techniques : angles, colinéarités, transformations… (cf. les deux exemples de Figure 1).

Ainsi, à chaque type de tâches est associé plusieurs organisations mathématiques ponctuelles $(OMP_k(T))_k = ((T,\tau_k,\theta_k,\Theta_k))_k$. Ces différentes organisations ponctuelles ne sont pas mises en place en même temps. D'une manière générale l'institution de l'enseignement I organise l'étude des $(OMP_k(T))_k$ tout le long de la scolarité. Mais à un niveau scolaire donné on se limite à un petit nombre d'organisations ponctuelles comme le précise Chevallard : « en une institution *I* donnée, à propos d'un type de tâches *T* donné, il existe en général *une seule* technique, ou du moins *un petit nombre* de techniques *institutionnellement reconnues*, à l'exclusion des techniques alternatives possibles – qui peuvent exister effectivement, mais alors en *d'autres* institutions. » [5] (Chevallard, 1999a).

4 Nous reviendrons sur ce point plus loin.

5 I correspond à un niveau scolaire.

D’où notre première hypothèse de travail :

HT1 : À un niveau scolaire donné, l’enseignement des mathématiques organise l’apprentissage d’une notion autour d’un petit nombre de praxéologies ponctuelles.

Castella (Castela, 2008, p.168) précise que « l'organisation de l'enseignement mathématiques étant ce qu'elle est c'est-à-dire structurée par les savoirs théoriques (autrement dit l'étude de secteurs correspondant à une théorie, subdivisés en thèmes plus restreints correspondant à des éléments particuliers de la théorie – Chevallard, 2002), n'est généralement sensible à un moment donné de la chronogenèse qu'une seule technique pour un type de tâches donné, technique générée par les éléments de savoir théoriques en cours d'enseignement. Or, le rapprochement des techniques connues et des éléments technologico-théoriques associés suppose une vision transversale, trans-thèmes, trans-secteurs ». Ce rapprochement entre les organisations ponctuelles associées à un même type de tâches T étant peu assumé par I. Il nécessite une réorganisation des $(OMP_k(T))_k$, qui permet à l’élève de mettre en œuvre une $OMP_k(T)$ pour résoudre une tâche de T. Pour représenter l’organisation des $(OMP_k(T))_k$, Castella (Castela, 2008) a introduit la notion de *praxéologie ou organisation mathématique ponctuelle complexe relative à un type T* définit par $[T, (\tau_k, \theta_k, \Theta_k)_k, \theta^T]$[6] où θ^T est la technologie associée à T qui intègre les technologies θ_k dans un ensemble plus large situant les techniques les unes par rapport aux autres, cernant leurs domaines respectifs d’efficacité.

En dehors de certains types de tâches, qui sont essentiellement étudiées en fin de l’enseignement secondaire, I organise un travail progressif sur les $OMP_k(T)$. Le choix de la technique ne se pose pas : soit on donne à l’élève la possibilité de reconnaître la spécificité de l’énoncé de la tâche prescrite soit par le contexte associé à la tâche que la technique est induite. Nous reviendrons sur ce point après l’examen de deux exemples.

Exemple 1.[7]

Entre la classe de quatrième et la classe de première on étudie un type de tâches Tra_eq2 : « résoudre une équation de second degré ». Plusieurs techniques sont mises en place selon la forme de l’équation à résoudre. Par exemple, la résolution de l’équation de la forme[8] $P_1(x)\times Q_1(x)=0$ est résolue par une technique dite du produit nul et celle de l’équation de la forme $P_1^2(x)=k$ (k>0) est résolue par la technique basée sur l’utilisation de la racine carrée. Sur cet exemple de type de tâches le travail sur le couple « forme de l’équation » et technique est assumé par l’institution tout au long de la scolarité. Chacun de ces types de tâches admet une seule technique institutionnelle τ_i. Ils constituent les organisations praxéologiques ponctuelles institutionnelles relatives au type de tâches Tra_eq2.

Pour l’institution, l’apprentissage de ces types de tâche selon une certaine progression, assure la réussite de la tâche : Tra_eq2. Ainsi, en classe de première, face à une tâche t de Tra_eq2 l’élève est censé utiliser une des techniques τ_i selon le type d’équation. Pour cela, il doit reconnaître à quel type de tâches appartient t.

---

6 Castella distingue dans la technologie deux composantes : « la *composante théorique* » notée θ^{th} et la « *composante pratique* » de la technologie notée θ^p (Castella, 2009, p.143). Nous ne souhaitons introduire cette distinction dans notre modèle.

7 Nous reprendrons cet exemple plus loin.

8 Nous adoptons la notation : $P_i(x)$ désigne un polynôme de degré i.

Ainsi, plutôt que de confronter l'élève à un type de tâches pour lequel il existe plusieurs techniques, l'institution préfère l'étudier à travers plusieurs types de tâche pour lesquels il y a une seule technique. Nous appelons le premier, type de tâches visé, qu'on notera $T_{visé}$. Notons que le travail sur les différents types de tâches relatifs à un $T_{visé}$, peut se faire sur plusieurs années. Mais à terme, l'institution attend à ce que l'élève soit confronté à des tâches du type $T_{visé}$.

Exemple 2.

Considérons le type de tâches $T_{alig.}$ « Montrer l'alignement de trois points dans un plan ». Ce type de tâches est transversal de l'école primaire à la classe de terminale. Plusieurs organisations mathématiques ponctuelles sont mises en place de façon progressive. Chaque technique définit une organisation mathématique ponctuelle de T_{alig}. Mais contrairement à l'exemple 1, aucun travail n'est fait par I sur la caractérisation des tâches pour lesquelles une technique est plus efficace pour l'accomplissement de la tâche t prescrite. Souvent ça sera le contexte de prescription de la tâche qui influence le choix d'une technique comme le chapitre en cours d'étude ou une indication dans la tâche comme le montre les deux exemples cités plus haut (Figure 1).

Soit T un type de tâches visé. Son apprentissage se fait dans le temps à travers l'étude des organisations mathématiques ponctuelles associées $(OMP_k(T))_k$. Si pour une $OMP_k(T)$ il y a une spécification pour caractériser les énoncés des tâches de $OMP_k(T)$, alors on parle de T_k sous-type de tâches de T. C'est-à-dire que l'institution s'est donnée des moyens pour caractériser les tâches de T où on attend la mise en œuvre de τ_k.

Nous introduisons la notion de portée institutionnelle d'une technique relative à un type de tâche, qu'on note $P_I(\tau/T)$: $P_I(\tau/T) = \{t \in T \ / \ I$ attend à ce qu'on mobilise τ pour accomplir $t\}$. Dans le cas où on peut caractériser $P_I(\tau/T)$ on la considère comme un sous-type de tâches de T.

Nous proposons d'adapter la notion *d'organisation mathématique ponctuelle complexe relative à un type de tâches* T par $[(T_k, \tau_k, \theta_k, \Theta_k)_k, \theta^T]$ où les T_k peuvent être des sous-types de tâches, ou non, auquel cas on a $T_k=T$ comme dans l'exemple 2. Dans la description de θ^T on se contentera de présenter que les éléments qui permettent de choisir la technique τ_k (en termes de pertinence et d'utilisabilité) puisque les θ_k seront présentées dans les $OMP_k(T)$.

Remarquons que pour un type de tâches T, sa spécification en sous-types de tâches peut être partielle. C'est-à-dire certaines organisations ponctuelles $OMP_k(T)$ sont associées à des sous-types de tâches et d'autres non. Ainsi, certaines organisations ponctuelles peuvent être décrites par $(T_k, \tau_k, \theta_k, \Theta_k)$ et d'autres par $(T, \tau_k, \theta_k, \Theta_k)$.

On a donc $OM(T)=[(OMP_k(T))_k, \theta^T]$ où :

- $OMP_k(T) = (T_k, \tau_k, \theta_k, \Theta_k)$ dans le cas où $P_I(\tau/T)$ est caractérisée dans I. T_k est un sous-type de tâches de T. On parlera d'organisation mathématique ponctuelle explicite.
- $OMP_k(T) = (T, \tau_k, \theta_k, \Theta_k)$ sinon. On parlera d'organisation mathématique ponctuelle implicite.

L'institution de l'enseignement secondaire privilégie les organisations mathématiques ponctuelles explicites en caractérisant $P_I(\tau/T)$. Mais pour certaines types de tâches l'institution ne caractérise pas $P_I(\tau/T)$. On montre aux élèves que la technique permet d'accomplir des tâches de T sans pouvoir les caractériser « officiellement » (exemple : problème d'alignement). Dans ce cas le contexte institutionnel de prescription de la tâche permet à l'élève de mettre en œuvre une technique adéquate voire même l'énoncé de la tâche prend en charge la mise en œuvre de la technique attendue (cf. Figure 1).

Cette organisation mathématique complexe se construit dans le temps (souvent sur plusieurs années scolaires). Pour prendre en compte la dimension temporelle, nous introduisons n comme variable discrète qui peut correspondre tout simplement à une année soit un niveau scolaire ou à découpage plus fin en terme de mois par exemple.

$OM(T, n) = [(T_k, \tau_k, \theta_k, \Theta_k)_{k,n}, \theta_n^T]$ où les $(T_k, \tau_k, \theta_k, \Theta_k)_{k,n}$ sont les organisation mathématiques ponctuelles enseignées avant l'instant n et θ_n^T la technologie complexe constituée à l'instant n.

A un moment donné de l'enseignement, on peut considérer que toutes les organisations mathématiques ponctuelles de T ont été mises en place et dans ce cas on a une organisation mathématique complexe ponctuelle qu'on notera sans l'indice n : OM(T).

Notre hypothèse HT1 peut être reformulée :

HT2 : L'institution suppose que le travail réalisé sur les différentes organisations ponctuelles $((T_k, \tau_k, \theta_k, \Theta_k))_k$ relative à un type de tâches T assure la mise en place de *l'organisation mathématique complexe* $OMPC(T)=[(T_k, \tau_k, \theta_k, \Theta_k)_k, \theta^T]$.

Comment décrire une technique d'une organisation ponctuelle de T ?

Le problème de description des techniques a été soulevé dans (Chevallard 1994) « … de quoi est faite une technique donnée ? De quels "ingrédients" se compose-t-elle ? Et encore : en quoi consiste la "mise en œuvre" d'une technique ? ». Si ce problème n'est pas posé explicitement dans les différents travaux qui font usage de l'analyse praxéologique, ces travaux en proposent des descriptions. Certains les décrivent sous forme d'actions plus ou moins structurées, d'autres les décrivent par des sous-tâches. Par exemple, dans (Cirade & Matheron, 1998) les auteurs décrivent la technique utilisée pour le type de tâches T : « résoudre une équation du premier degré », par des sous-tâches : développer une expression algébrique, effectuer les produits, transposer les termes, réduire chacun des membres, résoudre une équation de la forme a*x*=b. Puis, les auteurs ajoutent que ce découpage est arbitraire, et qu'il s'agit d'un modèle dont l'objectif est de mettre en évidence l'organisation mathématique et de l'évaluer. L'intérêt de ce découpage est qu'il renvoie à des tâches reconnues institutionnellement et pour chacune d'elles, il existe une praxéologie mathématique qui a été mise en place avant. D'ailleurs, les manuels adoptent ce mode de description des techniques. Nous voyons un intérêt dans ce découpage : il permet de mieux situer les difficultés des élèves dans la mise en œuvre d'une technique au niveau des sous-tâches qui composent la technique. Mais, ce qui nous semble plus pertinent ce n'est pas l'identification des sous-tâches en soi mais surtout la mise en œuvre des techniques pour accomplir ces sous-tâches. Ce découpage a été aussi adopté par Castella (Castela, 2008) où elle étudie comment une tâche peut intervenir dans la technique d'une autre tâche. Elle étudie la technique d'une tâche sous forme d'un enchaînement d'organisations mathématiques ponctuelles (Castela, 2008, p.129).

Dans notre recherche, nous avons adopté plusieurs niveaux de description d'une technique. Elle peut être décrite de façon *générique* quand on se place au niveau de type de tâches soit de façon *instancié* quand on se place au niveau d'une tâche. De plus, dans chaque cas on peut distinguer plusieurs niveaux de granularité de description.

Soit T un type de tâches d'organisations mathématiques ponctuelles $(OMP_k(T^*))_k$ au sein d'une institution I. Pour ne pas alourdir la notation avec l'indice k, on notera $(T, \tau, \theta, \Theta)$ une organisation ponctuelle associé à T*.

Au niveau générique 1, τ est décrite par une suite de type de tâches $(T_i)_i$. Nous distinguons deux types de tâches. D'une part, les types de tâches qui n'existent qu'à travers la mise en œuvre de techniques de certains types de tâches qu'on appelle type de tâches *intrinsèque* (cf. exemples dans le paragraphe III). D'autre part, les types de tâches qui peuvent être prescrites aux élèves qu'on appelle type de tâches *extrinsèque*.

Au niveau instancié 1, la technique est décrite par une suite de tâches $(t_i)_i$ qui sont des instanciations des types de tâche $(T_i)_i$ du niveau générique

A chaque T_i (de la description générique de la technique τ) est associé un ensemble d'organisations ponctuelles $(OMP_k(T_i))_k$ dans I. La mise en œuvre de T_i dans la technique τ repose sur la mobilisation d'une organisation ponctuelle de T_i. Notons que c'est la technologie θ^{Ti} de l'organisation mathématique complexe de T_i qui permet de faire le choix de l'organisation ponctuelle à mobiliser. Mais, au niveau générique on ne peut pas identifier l'organisation ponctuelle de T_i à mobiliser, sauf dans le cas où T_i n'admet qu'une seule technique, c'est-à-dire que l'OM de T_i est simple. Dans les autres cas, nous avons plusieurs techniques possibles et donc plusieurs praxis possibles. Au niveau générique 2, on peut associer à τ plusieurs descriptions à partir de ces praxis.

En revanche, au niveau instancié, on peut identifier les organisations ponctuelles qu'on peut mobiliser (dans le cas de l'analyse a priori) ou qui est mobilisée (dans le cas de l'analyse d'une production) pour chaque T_i. Dans ce cas on peut décrire la technique par une succession de praxis ce qui correspond au niveau instancié 2 : $\tau = ((t_i,\tau_i))_i$. Chaque technique τ_i peut être décrite à l'aide d'une suite de praxis jusqu'à un niveau qu'on considère comme élémentaire c'est-à-dire des praxis élémentaires. Les praxis intrinsèques sont considérées comme élémentaires.

La question du niveau de découpage pour la description des praxéologies et en particulier de la technique se ramène à la question des choix des (T_i) qui interviennent au niveau 1.

Comment choisir les types de tâches pour décrire une technique au niveau 1 ?

Nous proposons de revenir sur cette question après l'examen d'une étude de cas présentée dans le paragraphe III.

Comment décrire une technologie d'une organisation ponctuelle de T ?

Soit T un type de tâches d'OM ponctuelle : $(T, \tau, \theta, \Theta)$. Au niveau 1, la technique τ est décrite par une suite de (T_i). La technologie θ a pour fonction de justifier en quoi la mise en œuvre de types de tâches T_i permet d'accomplir le type de tâches T. Elle ne comporte pas nécessairement les technologies des techniques de T_i sauf dans certains cas où un type de tâches T_i joue un rôle clé dans la technique τ. Dans ce cas, la technologie θ_i peut intervenir, éventuellement avec une adaptation, dans la description de la technologie θ.

III. ETUDE D'UN CAS : RESOLUTION DES EQUATIONS DE DEGRE 2

Ce paragraphe porte sur l'étude du type de tâches$T_{r\text{-}eq2}$ « résoudre une équation du second degré » et plus précisément $T_{ra\text{-}eq2}$ « résoudre algébriquement une équation du second degré ». Dans l'exemple introductif (III.1.1) nous présenterons plusieurs choix de type de tâches pour décrire une même technique au niveau instancié 1. Ensuite, dans le paragraphe (III.1.2) nous analyserons le choix fait par Nguyen (Nguyen, 2006) dans son travail de thèse pour décrire les techniques du type de tâches$T_{ra\text{-}eq2}$. Nous reprenons cette étude avec une autre description des praxéologies pour appliquer le modèle décrit ci-dessus et proposant un autre découpage pour décrire l'OM de référence du type de tâches $T_{ra\text{-}eq2}$.

III.1.1.Exemple introductif

Soit la tâche t : résoudre l'équation $x(x+1) = (3-x)(2x+2)$. C'est une tâche qui relève du type de tâches« résoudre une équation du second degré ». En classe de seconde, une mise en œuvre d'une technique attendue peut être transcrite comme suit :

$x(x+1) = (3-x)(2x+2)$

$x(x+1)-(3-x)(2x+2) = 0$

$x(x+1)-2(3-x)(x+1) = 0$

$(x+1)[x-2(3-x)] = 0$

$(x+1)(x-6+2x) = 0$

$(x+1)(3x-6) = 0$

$x+1 = 0$ ou $3x-6 = 0$

$x = -1$ ou $x = 2$

Se pose le problème de découpage et plus précisément le niveau de granularité pour décrire les la technique aux niveaux instanciés 1 et 2. Nous proposons ci-dessous deux découpages possibles.

Découpage 1 :

Découpage de la mise en œuvre de τ	Les savoirs-faires intervenants dans τ
$x(x+1) = (3-x)(2x+2)$ $x(x+1)-(3-x)(2x+2) = 0$	t_1 : regrouper les termes dans un seul membre τ_1 : appliquer la règle : si a=b alors a-b=0
$x(x+1)-(3-x)(2x+2) = 0$ $x(x+1)-2(3-x)(x+1) = 0$ $(x+1)[x-2(3-x)] = 0$	t_2 : factoriser $x(x+1)-(3-x)(2x+2)$ τ_2 : faire apparaître un facteur commun en utilisant une factorisation partielle par 2, ensuite factoriser par $(x+1)$. Ces deux étapes utilisent la règle ab+ac=a(b+c).
$(x+1)[x-2(3-x)] = 0$ $(x+1)(x-6+2x) = 0$	t_3 : développer $-2(3-x)$ τ_3 : appliquer la règle a(b+c)=ab+ac à l'expression $-2(3-x)$
$(x+1)(x-6+2x) = 0$ $(x+1)(3x-6) = 0$	t_4 : réduire $x-6+2x$ τ_4 : appliquer la règle ab+ac=(b+c)a à l'expression $x+2x$
$(x+1)(3x-6) = 0$ $x+1 = 0$ ou $3x-6 = 0$	t_5 : résoudre l'équation $(x+1)(3x-6) = 0$ τ_5 : appliquer la règle : un produit de facteur est nul si l'un des facteurs est nul.
$x+1 = 0$ ou $3x-6 = 0$ $x = -1$ ou $x = 2$	t_{6a} : résoudre l'équation $x+1 = 0$ t_{6b} : résoudre l'équation $3x-6 = 0$ τ_6 : regrouper les monômes en x dans un membre puis isoler x.

Ce découpage est organisé par une succession de sous tâches t_1 à t_6. Au niveau instancié 1 la technique τ correspond à (t_1 ; t_2 ; t_3 ; t_4 ; t_5 ; t_6). L'intervention de ces tâches n'est pas la même dans la mise en œuvre de la technique τ. Ainsi, la tâche t_6 peut être vue comme une étape dans la technique de la tâche t_5. De même, t_3 peut être considérée comme une étape de la tâche réduire x-2(3-x), ce qui amène à un autre découpage dans lequel les tâches t_3 et t_4 feront partie de la description de la technique de la tâche réduire x-2(3-x). On peut même aller à un niveau au dessus, en considérant ces deux tâches comme éléments de la technique τ_2 en considérant que cette technique doit produire une factorisation réduite, ce qui peut être une attente de l'institution.

Découpage 2 :

Découpage de la mise en ouvre de τ	Les savoirs-faires intervenants dans τ
$x(x+1) = (3-x)(2x+2)$ $x(x+1)-(3-x)(2x+2) = 0$	t_1 : regrouper les termes dans un seul membre τ_1 : appliquer la règle : si a=b alors a-b=0
$x(x+1)-(3-x)(2x+2) = 0$ $x(x+1)-2(3-x)(x+1) = 0$ $(x+1)[x-2(3-x)] = 0$ $(x+1)(x-6+2x) = 0$ $(x+1)(3x-6) = 0$	t_2 : factoriser $x(x+1)-(3-x)(2x+2)$ τ_2 : - faire apparaître un facteur commun en utilisant une factorisation partielle par 2, ensuite factoriser par (x+1). Ces deux étapes utilisent la règle ab+ac=a(b+c). - réduire x-2(3-x)
$(x+1)(3x-6) = 0$ $x+1 = 0$ ou $3x-6 = 0$ $x = -1$ ou $x = 2$	t_3 : résoudre l'équation $(x+1)(3x-6) = 0$ τ_3 : - appliquer la règle : un produit de facteur est nul si l'un des facteurs est nul. - résoudre l'équation $x+1 = 0$ - résoudre l'équation $3x-6 = 0$

Ce deuxième découpage présente la technique comme succession de 3 tâches au lieu de 6 pour le premier. Au niveau instancié 1 la technique τ correspond à (t_1 ; t_2 ; t_3). L'objectif n'est pas de réduire le nombre de tâches dans la description de la technique, mais de faire apparaître ce qui nous semble être pertinent pour la description de la technique. Comment définir cette pertinence ? Autrement dit, comment choisir le niveau de granularité de description de la technique ?

III.1.2.Etude de la description des praxéologies ponctuelles faite par (Nguyen, 2006)

Nguyen Ai Quoc (Nguyen, 2006) propose un découpage[9] de $T_{ra\text{-}eq2}$ en sous-types de tâches. Ce découpage a été fait autour de deux organisations locales de la façon suivante[10] :

[9] Nous invitons le lecteur à consulter la thèse de Nguyen Ai Quoc (Nguyen, 2006).

[10] Explicitons le codage utilisé :

Sous-type de tâches	Technique	Description des techniques
T_{1f1} : *Résoudre : $P_1(x)\times Q_1(x)=0$* *Cas particulier,* *résoudre : $P_1^2(x)=0$*	τ_{1f1}: *τRègles* ProdN CarN	*On se ramène à la résolution de deux équations de degré 1 : $P_1(x)=0$ et $Q_1(x)=0$* *On se ramène à la résolution de l'équation de degré 1 : $P_1(x)=0$*
T_{2f1}: a/ Résoudre: $R_1(x)\times S_1(x)=R_1(x)\times S'_1(x)$ ou $R_1(x)\times S_1(x)+R_1(x)\times S'_1(x)=0$ avec $S_1(x)\neq S'_1(x)$ b/ Résoudre: $R_1(x)\times S_1(x)=R'_1(x)\times S'_1(x)$ ou $R_1(x)\times S_1(x)+R'_1(x)\times S'_1(x)=0$ où R1 et multiple de R'1 ou inversement.	τ_{2f1} : *τGfact* *Fact_ProdN*	*On met en facteur commun $R_1(x)$, ce qui ramène à* T_{1f1} *On cherche le facteur commun, on le fait apparaître dans les termes de l'équation, on le met en facteur et on est ramené à* T_{1f1}.
T_{3f1}: Résoudre: $R_1^2(x)-S_1^2(x)=0$	τ_{3f1} : *τGfact* IdR_ProdN	*On utilise l'identité dans R:* *"$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$" pour ramener l'équation à* *$(R_1(x)-\sqrt{k})(R_1(x)+\sqrt{k})=0$* *Ce qui ramène à* T_{1f1}.
T_{4f1}: Résoudre : $R_1^2(x)=S_1^2(x)$ ou $R_1^2(x)=k$ (k>0)	τ_{4f1} : *τRègles* *RAC* *(RAC* comme racine carrée*)*	*En utilisant la règle dans R : « $a^2=b^2\Leftrightarrow \sqrt{a^2}=\sqrt{b^2}\Leftrightarrow a=b$ ou $a=-b$ », on se ramène à la résolution de deux équations de degré 1 : $R_1(x)=S_1(x)$ ou $R_1(x)=-S_1(x)$* *(ou $R_1(x)=\sqrt{k}$ ou $R_1(x)=-\sqrt{k}$)*
T_{5f1} : Résoudre : $ax^2+bx+c=0$ Cas particulier où ax^2+bx+c est la partie développée d'une identité remarquable	τ_{5f1} *: τGfact* *IdR_CarN* (IdR comme Identité remarquable)	*On utilise dans R l'une des identités remarquables : $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ pour se ramener à une équation du type $P^2(x)=0$* *On est donc ramené à* T_{1f1}.

- *τGfact* (*G* comme générale, *fact* comme factorisation) : il s'agit de techniques permettent de se ramener, après factorisation, à l'annulation d'un produit de deux expressions algébriques de degré 1.
- *τRègles* : il s'agit de techniques reposant sur l'application de règles telles que : annuler un produit de facteurs (ProdN), ou annuler un carré (CarN), égaliser deux carrés (EgaCar) ou prendre la racine carrée des deux membres de l'égalité (RAC).
- *τDiscr* : Il s'agit de la technique d'utilisation du calcul du discriminant et des formules des solutions pour la résolution d'une équation du second degré de forme canonique.
- *τGdév* (*G* comme générale, *dév* comme développement) : il s'agit de techniques permettant de développer l'expression algébrique donnée pour se ramener à une équation de forme canonique.

T_{6f1} : Résoudre : $ax^2 + bx + c = 0$ Cas général	τ_{6f1} *: τGfact* Fact_ProdN	*On factorise le trinôme ax²+bx+c en utilisant la forme canonique de la fonction trinôme. On est donc ramené à* T_{1f1}.

Tableau 1- Praxéologies ponctuelles regroupées autour une organisation locale OML1

Sous-type de tâche	Technique	Description des techniques
T_{1f2} regroupe T_{5f1} et T_{6f1}	τ_{1f2} : τDiscr (Discr comme discriminant)	*On calcule les solutions en utilisant le discriminant et les formules des solutions*
T_{2f2} regroupe T_{1f1}, T_{2f1}, T_{3f1} et T_{4f1}.	τ_{2f2} *:* Dév_Discr (Dév comme développement)	*On utilise la propriété de double distributivité dans R : (a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd pour développer et se ramener à* T_{1f2}

Tableau 2 - Praxéologies ponctuelles regroupées autour une organisation locale OML2

Le découpage qui a été fait repose sur deux critères. L'un est spécifique à la technique de résolution des équations du second degré et l'autre est lié à la technique de factorisation. L'auteur a fait ce choix car dans le cadre d'une analyse comparative entre deux pays, la France et le Viêtnam, où l'enseignement de la factorisation n'a pas le même poids, il a cherché plutôt à étudier l'effet du type d'enseignement de la factorisation sur la résolution des équations du second degré. C'est en fonction de ces critères que l'auteur a proposé un découpage en sous-types de tâches et une description des techniques associées.[11]

D'autres regroupements sont possibles. Par exemple, en se plaçant à un niveau scolaire où la technique du discriminant n'a pas encore été introduite, on peut regrouper les types de tâches T_{2f1}, T_{3f1}, T_{5f1} et T_{6f1} en un seul type de tâches autour d'une même technique τ = (regroupement dans un seul membre, factorisation, résolution d'une équation produit). L'auteur les a distingués par rapport à la technique de factorisation. Si on s'intéresse uniquement au fait que l'élève mobilise la factorisation ou non, et non aux techniques qu'il met en œuvre pour factoriser, alors le regroupement de ces types de tâche nous semble pertinent. En revanche, T_{4f1} peut constituer en elle-même un sous type de tâches car elle peut mobiliser deux techniques : τ = (regroupement dans un seul membre, factorisation, résolution d'une équation produit) ou τ' = (En utilisant la règle dans R : « $a^2 = b^2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2} = \sqrt{b^2} \Leftrightarrow (a = b) \vee (a = -b)$ », on se ramène à la résolution de deux équations de degré 1 : $R_1(x) = S_1(x)$ ou $R_1(x) = -S_1(x)$).

Nous voyons, à travers cet exemple, que le choix des types de tâches fait par le chercheur n'est pas forcément celui qui est fait dans l'institution. Le chercheur décide en fonction des observables qu'il a retenus dans son étude. Ainsi, en fonction de l'objet d'étude, il définit des observables pour ses analyses, un niveau de granularité de description des techniques et un découpage des types de tâches et des sous-types de tâches.

En absence d'un mécanisme générique pour faire ces découpages, il est alors nécessaire de réaliser une étude spécifique pour chaque objet d'enseignement en prenant en compte l'institution, le savoir mathématique et la finalité du chercheur. Dans le paragraphe suivant

11 Précisions que l'étude faite par Nguyen Ai Quoc (Nguyen, 2006) à un moment où la technique du discriminant n'a pas encore été introduite.

nous proposons un nouvel découpage des types de tâches selon des principes qu'on explicitera.

III.1.3.Caractérisation de l'OM à enseigner pour le type de tâches$T_{r\text{-}eq2}$

Comme nous l'avions dit plus haut, la base empirique pour élaborer ce modèle est l'étude des programmes et des manuels.

On examinera les programmes de 2005 des trois niveaux 3°, 2° et 1° où ce type de tâches est étudié.

Pour chaque niveau scolaire, nous présenterons ce que disent les programmes à propos des équations du second degré, ensuite nous analyserons si la notion d'équation du second degré est définie dans les manuels et quelles sont les organisations mathématiques mises en place.

a) Classe de troisième

Les premières équations du second degré sont étudiées en classe de troisième

« Résoudre une équation mise sous la forme $A(x).B(x) = 0$, où $A(x)$ et $B(x)$ sont deux expressions du premier degré de la même variable x. » (Programmes de 3°, 2008)

Nous avons analysé deux manuels :

Collection Triangle, Troisième, 2008 qu'on désignera (Triangle-3°-2008)

Collection Diabolo, Troisième, 2004 qu'on désignera (Diabolo-3°-2004)

Ces deux manuels abordent un type de tâches T « résoudre une équation ». Ce type de tâches regroupe les équations de degré 1 ($T_{r\text{-}eq1}$) et du second degré ($T_{r\text{-}eq2}$) (cf. Figure 2).

i) <u>Triangle-3°-2008</u>

Le manuel définit une équation du second degré sous forme d'une propriété !

« PROPRIETE : Une équation est du second degré si l'inconnue est au carré (éventuellement après développement). »

Cette tentative de définir une équation du second degré comporte des ambigüités. En particulier, l'information entre parenthèse devrait être remplacée par « après développement et réduction ».

Le manuel Triangle-3° présente les techniques associées à deux types de tâche relatives respectivement aux équations de degré 1 et certaines équations de degré 2 (cf. Figure 2).

Pour les équations de degré 1, il renvoie au travail sur OMP($T_{r\text{-}eq1}$) effectué en classe de 4°.

Pour les équations du second degré, on étudie les équations qui, après factorisation, se ramènent à une équation du type $A(x).B(x)=0$ et celles qui se ramènent à x^2=a. Aucune spécification de caractérisation de ces types de tâches n'est proposée dans le manuel. Ce qui induit une règle du contrat didactique R1 : « toutes les équations du second degré sont celles qui se prêtent à une factorisation pour se ramener soit à une équation-produit soit à l'équation x^2=a ».

1. Résoudre une équation

MÉTHODE 1 — **Application de la méthode vue en 4e, si c'est une équation du premier degré**

Voir rappel 20 p. 265

MÉTHODE 2 — **Application de la propriété du produit nul si c'est une équation du second degré**

EXERCICE : Résoudre l'équation $(x + 1)(2x - 3) - (x + 1)^2 = 0$

ÉTAPES :	SOLUTION :
(1) Je m'assure que l'un des deux membres est nul. Si ce n'est pas le cas, il faut supprimer les termes contenus dans l'un des deux membres.	Le deuxième membre de cette équation est nul. Les équations suivantes ont les mêmes solutions.
	$(x + 1)(2x - 3) - (x + 1)^2 = 0$
(2) Je factorise le membre non nul.	$(x + 1)\,[(2x - 3) - (x + 1)] = 0$
	$(x + 1)(2x - 3 - x - 1) = 0$
(3) J'applique la propriété : « Si $ab = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$ »	$(x + 1)(x - 4) = 0$ donc $x + 1 = 0$ ou $x - 4 = 0$ $x = -1$ ou $x = 4$
(4) Je conclus.	Les solutions sont -1 et 4.

Cas particuliers : Si l'équation se ramène à une équation du type $x^2 = a$ on peut appliquer la propriété vue p. 46 du chapitre 3 « Racines carrées ».

Figure 2 : Triangle-3°-2008, p. 132

Considérons cinq tâches proposées dans la partie « exercices fondamentaux ».

t_1 : $(4x-1)(3x+2) = 0$ (ex.32 p.137, Triangle-3°-2008)

t_2 : $(3x-12)^2 = 0$ (ex27. p.137, Triangle-3°-2008)

t_3 : $(7x-3)(4x-2)+ (7x-3)(4x-2) = 0$ (ex36. p.137, Triangle-3°-2008)

t_4 : $a^2 = 7$ (ex.31 p.137, Triangle-3°-2008)

t_5 : $(2x-1)^2-49 = 0$ (ex.36 p.137, Triangle-3°-2008)

La tâche t_1 relève du type de tâches de référence « équation-produit » dont la technique consiste à utiliser la propriété du produit nul et de résoudre deux équations de degré 1. La tâche t_2 relève du même type de tâche. On notera ce type de tâches$T_{r\text{-eq2.pn}}$.

La tâche t_3 relève d'un type de tâches où il faut factoriser et se ramener à l'équation produit. On notera ce type de tâches $T_{r\text{-eq2.fact}}$.

La tâche t_4 relève d'un type de tâches dont la technique est donnée par une propriété vue dans le chapitre « Racines carrées » (cf. Figure 3). On notera ce type de tâches$T_{r\text{-eq2.car}}$.

2. Équation $x^2 = a$

PROPRIÉTÉ

Soit a un nombre donné.

- Si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution.
- Si $a = 0$, l'équation $x^2 = 0$ a une solution : le nombre 0.
- Si $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ a deux solutions :
  - l'une positive : $\sqrt{a}$
  - l'autre négative : $-\sqrt{a}$

➜ **Exemple :** Résoudre les équations suivantes.

(1) $x^2 = 11$ (2) $x^2 = -1$

L'équation (1) a deux solutions : $\sqrt{11}$ et $-\sqrt{11}$

L'équation (2) n'a pas de solution car il n'existe pas de nombre dont le carré est – 1.

Figure 3 : Triangle-3°-2008, p. 46

La tâche t_5 peut se ramener à $(2x\text{-}1)^2 = 49$ et appliquer la technique relative aux équations x^2=a. Mais d'après le manuel, il est attendu de l'élève à ce qu'il factorise $(2x\text{-}1)^2\text{-}49$. L'analyse des exercices montre qu'on propose aux élèves les équations du type $(ax+b)^2\text{-}c = 0$ ou $(ax+b)^2=c$ dans le cas où c est un carré parfait pour pouvoir factoriser facilement. Donc t_5 relève de $T_{r\text{-}eq2.fact}$.

ii) Diabolo-3°-2004

Le manuel Diabolo-3° ne définit pas l'équation du second degré. En revanche, il définit de façon claire une équation produit nul comme le montre l'extrait suivant (Figure 4).

1 RÉSOUDRE UNE ÉQUATION PRODUIT NUL

Définition Les lettres a, b, c, d et x désignent des nombres ($a \neq 0$ et $c \neq 0$).

Une équation produit nul est une équation de la forme : $\underbrace{(ax+b)(cx+d)}_{\text{le premier membre est un produit}} = \underset{\text{le second membre est 0}}{0}$

$(x+3)(x+2) = 7$ n'est pas une équation produit nul, car le membre de droite n'est pas égal à 0.

$(x-1)+(x-5) = 0$ n'est pas une équation produit nul, car le membre de gauche n'est pas un produit.

Propriété Si l'un des facteurs d'un produit est nul alors le produit est nul :

si $A = 0$ ou si $B = 0$, alors $A \times B = 0$.

Réciproquement, si un produit de facteurs est nul alors l'un au moins des facteurs est nul :

si $A \times B = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.

une MÉTHODE pour résoudre une équation produit nul

Résoudre l'équation $(2x+6)(x+2) = 0$.

$(2x+6)(x+2) = 0$ ← ❶ *On identifie une équation produit nul.*

Si un produit de facteurs est nul alors l'un au moins des facteurs est nul : ← ❷ *On utilise la propriété du cours. Ici, $A = 2x+6$ et $B = x+2$.*

$2x+6 = 0$ ou $x+2 = 0$ ← ❸ *On résout les deux équations du premier degré à une inconnue.*

$2x = -6$ $x = -2$

$x = -3$

Les solutions de l'équation sont -3 et -2. ← ❹ *On conclut en donnant les solutions.*

Figure 4 : Diabolo-3°-2004, p.50

La propriété constitue un élément technologique pour produire une technique présentée dans "une méthode" pour accomplir le type de tâches« équation produit ». Notons que la première étape invite à reconnaître si la tâche relève bien du type de tâches« équation produit », ensuite on applique la propriété pour ensuite résoudre deux équations de degré 1. Il s'agit du type de tâches$T_{r\text{-}eq2.pn}$.

Un autre type de tâches est étudié dans ce chapitre est l'équation $x^2 = a$ ($T_{r\text{-}eq2.car}$) dont la technique est générée par la propriété suivante.

2 L'ÉQUATION $x^2 = a$

- Si a est strictement positif, alors l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.
- Si a est égal à 0, alors l'équation $x^2 = a$ admet une seule solution : 0.
- Si a est strictement négatif, alors l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution.

Figure 5 : Diabolo-3°-2004, p.50

Nous venons de présenter les deux OM présentées dans la partie cours. Dans la partie exercices on trouve des tâches qui relèvent de ces deux OM mais aussi d'autres tâches qui nécessitent une factorisation avant de se ramener à une équation produit (cf. Figure 6). Notons que l'énoncé invite l'élève à factoriser pour résoudre les équations.

20 Après avoir effectué une factorisation, résoudre les équations suivantes :

a) $(5x+7)(x-2)+(5x+7)(x+4)=0$;
b) $(x+3)(x-7)-(x+3)(11-2x)=0$;
c) $(x+2)(x-5)+(x+11)(x+2)=0$;
d) $(5+5x)(2x-3)-(5+5x)(x+4)=0$.

Figure 6 : Diabolo-3°-2004, p.51

De cette analyse, nous retenons

($T_{r\text{-}eq2.pn}$ / $\tau_{r\text{-}eq2.pn}$)

$T_{r\text{-}eq2.pn}$: résoudre les équations de la forme $P_1(x)\times Q_1(x)=0$ ou $P_1^2(x)=0$.

$\tau_{r\text{-}eq2.pn}$:

- appliquer la règle : un produit de facteur est nul si l'un des facteurs est nul
- résoudre deux équations de degré 1 qui relèvent du type de tâches$T_{r\text{-}eq1}$

($T_{r\_eq2.car}$ / $\tau_{r\text{-}eq2.rac}$)

$T_{r\_eq2.rac}$: résoudre les équations de la forme x^2=a.

$\tau_{r\text{-}eq2.rac}$:

- si a est strictement positif alors l'équation a deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
- si a est nul alors l'équation admet une seule solution 0
- si a est strictement négatif alors l'équation n'admet pas de solution.

($T_{r\_eq2.fact}$ / $\tau_{r\text{-}eq2.fact}$)

$T_{r\_eq2.fact}$: résoudre les équations de la forme $P_2(x) = Q_2(x)$ où les polynômes sont choisis de sorte qu'on puisse factoriser.

$\tau_{\text{r-eq2.fact}}$:

- transposer tous les termes dans un membre, en l'occurrence à droite, pour avoir un second membre nul
- factoriser le membre de droit, pour obtenir une équation du type $T_{\text{r-eq2.pn}}$
- traiter $T_{\text{r-eq2.pn}}$

b) *Classe de seconde*

Dans les programmes de 2001, la « capacité attendue » est : « Résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré ». L'étude des équations est faite après les fonctions pour permettre d'aborder deux modes de résolution graphique et algébrique : « Pour un même problème, on combinera les apports des modes de résolution graphique et algébrique. On précisera les avantages et les limites de ces différents modes de résolution ».

Notons que les programmes mettent l'accent sur la complémentarité des deux modes de résolutions et que le point de vue des fonctions peut enrichir la réflexion sur la résolution des équations.

Les nouveaux programmes de 2009 conservent les mêmes objectifs en ajoutant dans les capacités attendues : « Encadrer une racine d'une équation grâce à un algorithme de dichotomie ».

Nous proposons l'analyse des manuels de seconde : (Math'x, Seconde, 2005), (Repère, Seconde, 2004) et (Hyperbole, Seconde, 2004).

i) Math'x, Seconde, 2005

Dans la partie cours, on étudie un type de tâches $T_{\text{r-eq}}$ désigné par « résolution d'équations » sans donner la définition d'équation ni préciser qu'on travaille sur le degré 2.

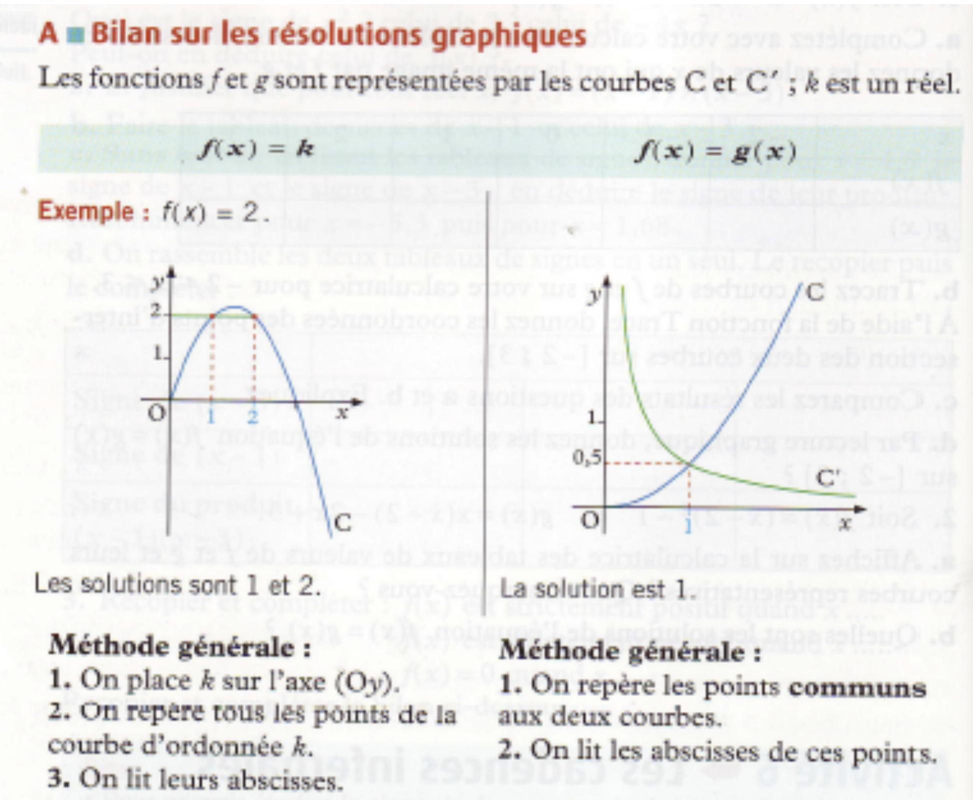


Figure 7 : Math'x, Seconde, 2005, p. 152

On présente des techniques graphiques et algébriques.

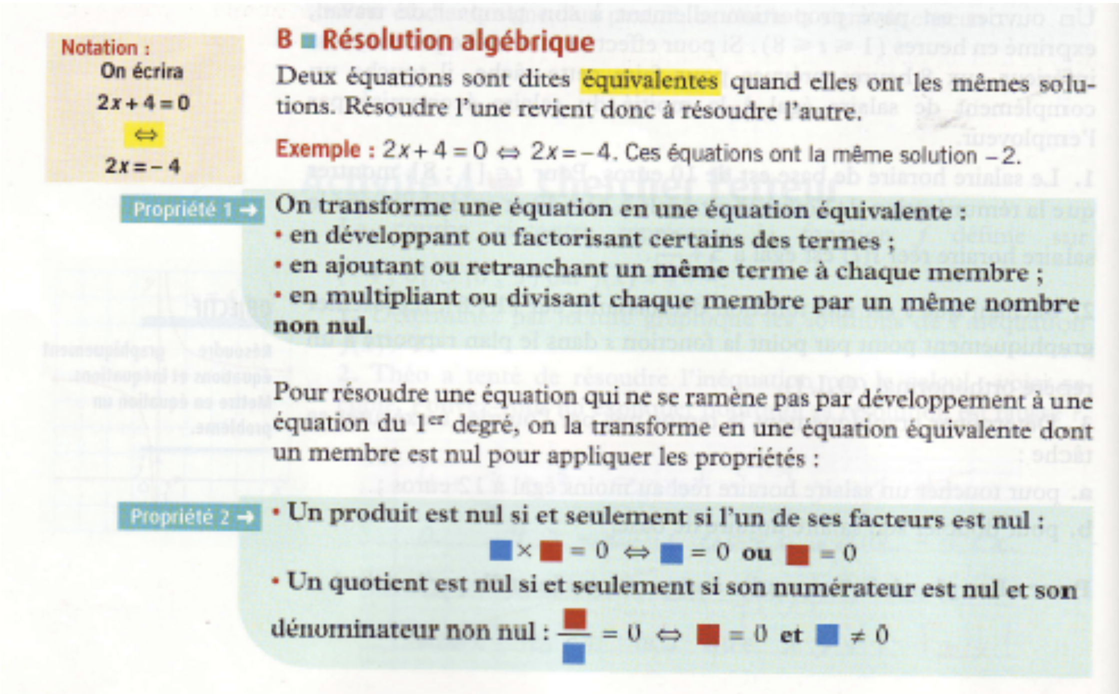
Deux techniques graphiques sont étudiées avec une caractérisation des tâches où elles peuvent être mobilisées. Le manuel définit alors deux sous-types de tâches caractérisées respectivement par les équations « f(x)=k » et « f(x)=g(x) ». Nous avons ainsi deux organisations ponctuelles associées au type de tâches « résolution d'équations » : $OMP_1(T_{r\text{-}eq})$ et $OMP_2(T_{r\text{-}eq})$.

L'organisation $OMP_1(T_{r\text{-}eq})$ est définie par le sous-type de tâches T_1 « f(x)=k », la technique τ_1 qui est décrite dans le paragraphe A de la page 152. Le bloc technologique n'est pas présenté dans ce chapitre, mais il est possible de le reconstruire à partir du cours sur les fonctions. La technologie consiste à interpréter l'équation f(x)=k par la recherche des antécédents de k par f.

L'organisation $OMP_2(T_{r\text{-}eq})$ est définie par le sous-type de tâchesT_2 « f(x)=g(x) », la technique τ_2 qui est décrite dans le paragraphe A de la page 152. Comme ci-dessus, le bloc technologique peut être reconstruit à partir du cours sur les fonctions. Ainsi, la technologie consiste à interpréter l'équation f(x)=g(x) par la recherche des abscisses des points d'intersections des courbes associées aux fonctions f et g.

Selon l'esprit du programme de la classe de seconde, on peut faire l'hypothèse que l'enseignant apportera les éléments technologiques des deux organisations $OMP_1(T_{r\text{-}eq})$ et $OMP_2(T_{r\text{-}eq})$.

Pour la résolution algébrique, une définition d'équivalence entre les équations est donnée ainsi que deux propriétés : la première présente les transformations qui assurent l'équivalence entre les équations et la seconde porte sur les règles du produit nul et quotient nul[12].



Notation : On écrira $2x+4=0 \Leftrightarrow 2x=-4$

B ■ Résolution algébrique

Deux équations sont dites équivalentes quand elles ont les mêmes solutions. Résoudre l'une revient donc à résoudre l'autre.

Exemple : $2x+4=0 \Leftrightarrow 2x=-4$. Ces équations ont la même solution -2.

Propriété 1 → **On transforme une équation en une équation équivalente :**
- **en développant ou factorisant certains des termes ;**
- **en ajoutant ou retranchant un même terme à chaque membre ;**
- **en multipliant ou divisant chaque membre par un même nombre non nul.**

Pour résoudre une équation qui ne se ramène pas par développement à une équation du 1er degré, on la transforme en une équation équivalente dont un membre est nul pour appliquer les propriétés :

Propriété 2 →
- **Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul :** $■ \times ■ = 0 \Leftrightarrow ■ = 0$ **ou** $■ = 0$
- **Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur non nul :** $\frac{■}{■} = 0 \Leftrightarrow ■ = 0$ **et** $■ \neq 0$

Figure 8 : Math'x, Seconde, 2005, p. 152

Ces deux propriétés sont des éléments technologiques des techniques algébriques présentées dans la page 153 du cours (cf. Figure 9).

12 Notons que cette propriété n'indique pas la nature des facteurs.

L'exercice 1 propose trois tâches qui relèvent d'un type de tâches « Résoudre dans R une équation ». Mais l'examen de l'ensemble des tâches proposées dans le chapitre nous permet de préciser le type de tâches étudié. Il s'agit des équations du second degré où les termes peuvent être des fractions rationnelles.

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1 Résoudre une équation

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a. $x^2-3=(x-1)(x+2)$; **b.** $x^2=1+2(x-1)^2$; **c.** $\dfrac{x+3}{x-2}=0$.

Solution

a. Développons :

$x^2-3=(x-1)(x+2) \Leftrightarrow x^2-3=x^2+2x-x-2$

L'équation équivaut donc à $-3=x-2$

et finalement à $x=-1$.

L'équation a pour seule solution -1.

b. $x^2=1+2(x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-1-2(x-1)^2=0$

En factorisant, l'équation équivaut successivement à :

$$(x-1)(x+1)-2(x-1)^2=0$$
$$(x-1)[(x+1)-2(x-1)]=0$$
$$(x-1)[x+1-2x+2]=0$$

L'équation équivaut donc à $(x-1)(-x+3)=0$.

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. On a donc $x-1=0$ ou $-x+3=0$ c'est-à-dire $x=1$ ou $x=3$.

L'équation admet deux solutions : 1 et 3.

c. $\dfrac{x+3}{x-2}=0 \Leftrightarrow x+3=0$ **et** $x-2\neq 0$

L'équation équivaut donc à $x=-3$ avec pour condition $x\neq 2$. L'équation a donc pour seule solution -3.

Méthode

Pour résoudre une équation, on identifie d'abord le type d'équation :

Premier cas (voir le **a.** ci-contre) : si en développant et/ou simplifiant, on n'a plus que des termes en x et des nombres réels connus (les termes éventuels en x^2, x^3, $\frac{1}{x}$, ... s'éliminant) :

- on développe et on simplifie ;
- on résout l'équation obtenue.

Second cas (voir le **b.** ci-contre) : si en développant et/ou simplifiant, il reste des termes en x^2, x^3, $\frac{1}{x}$, etc. :

- on rassemble tous les termes dans le premier membre pour que le second membre soit nul ;
- on se ramène à **un produit égal à 0** en factorisant **ou** à un **quotient égal à 0** en réduisant au même dénominateur.

voir aussi exercices n° 8 à 17, 25 à 30

Figure 9 : Math'x, Seconde, 2005, p. 153

Un seul exercice porte sur la résolution d'une équation de degré 3 mais dont la résolution algébrique étudiée ne fonctionne pas.

31 On considère l'équation suivante :

$$x^3-\frac{8}{3}x^2+x+\frac{2}{3}=0.$$

1. Pouvez-vous résoudre cette équation ?
2. Trouvez par tâtonnement un entier solution.
3. Grâce à la calculatrice, trouvez d'autres solutions. Ces solutions sont-elles des solutions exactes ou approchées ?

Figure 10 : Math'x, Seconde, 2005, p. 165

Cet exercice est suivi d'un point info où on indique que les équations étudiées en seconde sont d'un type particulier. Il s'agit des équations qu'on peut résoudre avec la technique étudiée dont les caractéristiques ne sont pas explicitées aux élèves. Comme la technique étudiée ne permet que la résolution de certaines équations de degré 2 (éventuellement de degré 3, mais ces équations ne sont pas au programmes de la classe de seconde) l'institution ne proposera que des équations qui peuvent être résolues par les techniques étudiées. Examinons ces techniques algébriques. Dans la rubrique « méthode », il est demandé à l'élève d'identifier le « type d'équation »[13] à résoudre. Deux types sont présentés : d'une part les équations qui après développement et réduction deviennent des équations de degré 1 et qui sont caractérisées par le fait « qu'il n'y a plus que des terme en x et des nombres réels »[14] et d'autre part les équations qui ne sont pas du premier degré caractérisées par le fait qu'après développement et simplification « il reste des termes en x^2, x^3 et $\frac{1}{x}$ etc. »[15]. Pour chacun de ces deux types une technique est indiquée. D'où la question sur le découpage des organisations ponctuelles : la rubrique « méthode » propose-t-elle une technique ou deux techniques ? Les deux interprétations sont possibles. En effet, on peut considérer la « méthode » comme une seule technique τ associée au type de tâches $T_{r\text{-}eq}$. On peut aussi considérer dans la « méthode » la description de deux techniques associées à deux sous-types de tâches définissant ainsi deux organisations ponctuelles du type de tâches $T_{r\text{-}eq}$:

- L'organisation $OMP_3(T_{r\text{-}eq})$ est définit par le sous-type de tâches T_3 : « les équations telles que après développement et simplification on obtient une équation de degré 1 », la technique τ_3 consiste à développer, réduire puis résoudre une équation de degré 1. Les éléments technologiques renvoient aux organisations praxéologiques des types de tâche de développement, réduction et résolution des équations de degré 1. Pour ce dernier type de tâches la propriété 1 citée dans « Figure 8 : Math'x, Seconde, 2005, p. 152 » fournit les éléments technologiques. Il s'agit du type de tâches$T_{r\text{-}eq1}$.

- L'organisation $OMP_4(T_{r\text{-}eq})$ est définie par le sous-type de tâches T_4 « les équations telles que après développement et simplification on n'obtient pas une équation de degré 1»[16], la technique τ_4 consiste à regrouper tous les termes dans le premier membre (i.e. le membre de droite), « on se ramène à un produit égal à 0 en factorisant ou à un quotient égal à 0 en réduisant au même dénominateur »[17]. Comme la portée de cette technique est limitée à certaines tâches, on préfère reformuler le sous-type de tâches T_4 par « les équations telles que après développement et simplification on n'obtient pas une équation de degré 1 et qui s'y prêtent à une factorisation ». Les éléments technologiques renvoient aux technologies des organisations praxéologiques des types de tâche de réduction et de factorisation, et la propriété 2 citée dans « Figure 8 : Math'x, Seconde, 2005, p. 152 ». On peut penser que le degré peut être quelconque à partir du moment où on peut factoriser pour se ramener à un produit de facteurs nul. Mais, l'analyse des exercices montre que ce sont des équations de degré 2.

Peut-on dire que pour le type de tâches $T_{r\text{-}eq}$ il y a 4 organisations ponctuelles $OMP_1(T_{r\text{-}eq})$ $OMP_2(T_{r\text{-}eq})$, $OMP_3(T_{r\text{-}eq})$ et $OMP_4(T_{r\text{-}eq})$ décrites ci-dessus ? Notre position est de distinguer ces organisations mathématiques car les attentes, en terme d'exigences et donc du contrat didactique, ne sont pas les mêmes pour $OMP_1(T_{r\text{-}eq})$ et $OMP_2(T_{r\text{-}eq})$ d'une part que pour $OMP_3(T_{r\text{-}eq})$ et $OMP_4(T_{r\text{-}eq})$ d'autre part. Ainsi, en fonction du contexte, l'élève doit mobiliser soit une technique τ_i (i=1 ou 2) soit une technique τ_i (i=3 ou 4). D'ailleurs, l'analyse du manuel permet de dégager une règle du contrat didactique : *si on ne précise pas la résolution graphique dans l'énoncé alors l'équation doit être résolue algébriquement*. Dans l'exercice

13 cf. Figure 9 : Math'x, Seconde, 2005, p. 153

14 ibidem

15 ibid..

16 cf. remarque ci-dessous

17 ibid.

proposé dans « Figure 10 : Math'x, Seconde, 2005, p. 165 » il est demandé dans la première question de dire si on peut résoudre l'équation. Ce qui est sous-entendu est la résolution algébrique et donc la réponse attendue est qu'on ne peut pas la résoudre. Dans la question 3 de l'exercice on demande de trouver grâce à la calculatrice des solutions et de vérifier si elles sont exactes ou approchées. Ici, la résolution graphique permet de résoudre des équations qu'on ne peut pas résoudre algébriquement.

Dans ce manuel, on trouve peu d'exercices qui font intervenir les deux techniques algébriques et graphiques. Soit on utilise le graphique pour contrôler une résolution algébrique soit pour mettre en évidence les limites de l'une d'elles comme le montre l'exemple ci-dessous :

19 CD CD Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 0{,}99$.

1. Tracer la courbe représentant f sur $[-2\ ;\ 5]$ sur une calculatrice.

2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.

3. a. Développer $(x - 0{,}9)(x - 1{,}1)$.

b. Résoudre $f(x) = 0$ par le calcul.

4. Vos résultats sont-ils cohérents ?

La première partie de l'exercice (1 et 2) peut être considérée comme relevant du type de tâches T_1. La deuxième partie (3) peut être considérée comme relevant du type de tâches T_4 dont la factorisation est donnée par l'exercice.

Enfin, la question 4 demande de vérifier la cohérence des résultats. Plus précisément, la résolution algébrique permet de contrôler la résolution graphique.

Remarquons que si on utilise la fenêtre standard de la calculatrice l'élève peut conjecturer que l'équation a une seule solution.

Figure 11 : Math'x, Seconde, 2005, p. 164.

Un autre sous-type de tâches T_5 peut être proposé dont la technique combine les résolutions graphique et algébrique. Ce sous-type est absent de ce manuel mais il est suggéré par le document d'accompagnement des programmes de seconde de 2001 :

solutions. Un autre exemple est l'utilisation de la représentation graphique de la fonction $x \rightarrow x^2 + 3x - 10$ pour conjecturer que 2 par exemple est une solution de l'équation $x^2 + 3x - 10 = 0$; le calcul permet de vérifier facilement que c'est bien le cas ; il reste à anticiper un peu sur la factorisation et à vérifier que $(x - 2)(x + 5)$ est bien une écriture possible pour l'expression $x^2 + 3x - 10$ pour aboutir à la résolution de l'équation $x^2 + 3x - 10 = 0$.

Figure 12 : Document accompagnement, Seconde, 2001

Le choix de l'exemple n'est pas pertinent car les deux solutions 2 et -5 peuvent être obtenues graphiquement et ensuite on vérifie qu'elles sont exactes. En revanche, si on considère l'équation $x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0$ qui relève du type de tâches T_5 dont la technique consiste à représenter la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0$, de conjecturer que 2 est une solution de l'équation (cf. Figure 13), de vérifier cette conjecture par le calcul et ensuite de chercher à factoriser $x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}$ sous la forme $(x-2)(x-a)$ et procéder à la résolution de l'équation.

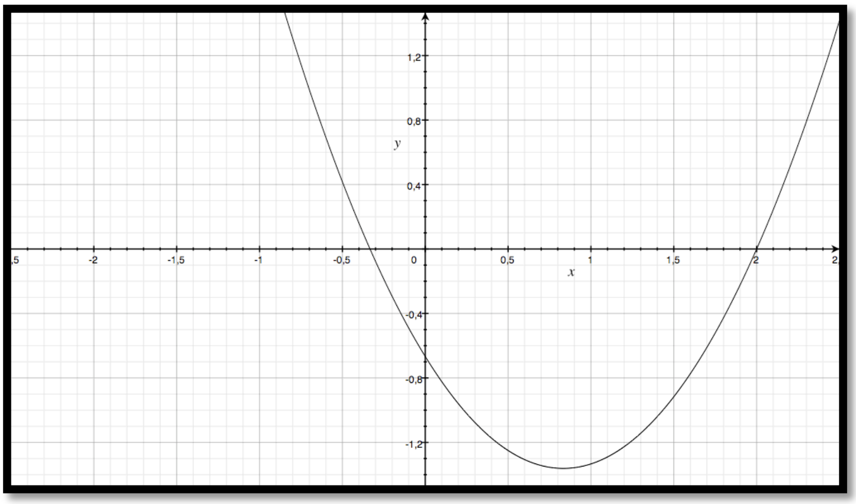


Figure 13 : Représentation graphique de $y = x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}$

Cela suppose qu'un travail sur la relation entre les racines et la factorisation doit être fait. La portée de cette technique est limitée au cas où l'une des solutions est une valeur facile à conjecturer graphiquement. La mise en œuvre de cette technique n'est pas facile au niveau de la conjecture selon que le tracé est réalisé par l'élève (notons que c'est ce type de tracé est introduit en cette classe) ou par un instrument informatique. Le rôle du graphique dans cette technique est d'obtenir la factorisation du trinôme.

Nous constatons que ce manuel ne met pas suffisamment en avant l'esprit du programme concernant le lien entre les deux modes de résolution : graphique et algébrique.

Enfin, on peut remarquer que dans ce manuel on n'aborde pas le degré d'une équation sauf celles du premier degré.

ii) Repère, Seconde, 2004

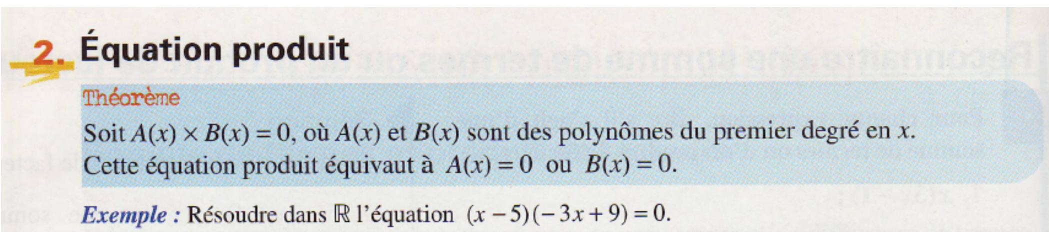
Après la définition du type de problème « résoudre une équation », le manuel présente des sous-types de tâches avec des techniques et des éléments technologiques.

On retrouve les sous-types de tâches suivants, dont certains ont été explicités dans l'analyse des manuels de la classe de troisième.

- $T_{r\text{-}eq2.pn}$: résoudre les équations de la forme $P_1(x) \times Q_1(x)=0$ ou $P_1^2(x)=0$. Ce type de tâches est désigné par Equation produit.

- $\tau_{r\text{-}eq2.pn}$: appliquer la règle : un produit de facteur est nul si l'un des facteurs est nul et résoudre deux équations de degré 1.

La technologie est présentée par un théorème qui porte sur le produit nul des polynômes de degré 1 (cf. Figure 14) contrairement aux autres manuels où la propriété dite du produit nul ne précise pas le statut des facteurs.



2. Équation produit

Théorème

Soit $A(x) \times B(x) = 0$, où $A(x)$ et $B(x)$ sont des polynômes du premier degré en x.
Cette équation produit équivaut à $A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x-5)(-3x+9)=0$.

Figure 14 : Repère, Seconde, 2004, p. 176

Dans tous les cas, ce théorème ne peut pas être justifié par l'algèbre des polynômes comme on peut trouver dans un manuel de 1948 où le développement d'un environnement technologique s'appuie sur l'objet polynôme (cf. Figure 15)[18].

87. Condition pour qu'un produit de deux polynomes soit identiquement nul.

Il est évident que si l'un d'eux est identiquement nul, le produit sera nul.

D'autre part, il résulte des théorèmes du n° 86 que, si aucun des deux polynomes n'est identiquement nul, le produit ne le sera pas non plus puisqu'il aura au moins deux termes non nuls.

Nous pouvons donc énoncer :

Théorème. — Pour qu'un produit de deux polynomes soit identiquement nul il faut et il suffit que l'un d'eux au moins le soit.

Théorèmes du n°86

Théorème. — Le produit de deux polynomes en *x* de degrés respectifs *n* et *p* est un polynome de degré $n + p$. Le terme de plus haut degré du produit est, sans réduction possible, le produit des termes de plus haut degré des polynomes donnés.

…

Nous énoncerons :

Théorème. — Le terme de plus bas degré du produit de deux polynomes en *x* est le produit, sans réduction possible, des termes de plus bas degré des polynomes donnés.

Il en résulte que le produit de deux polynomes en x contient au moins deux termes.

Figure 15 : Algèbre, Classe de mathématiques, Hachette, 1948.

Dans le manuel « : Repère, Seconde, 2004 » (Figure 14) il faut interpréter A(x) et B(x) comme des nombres généralisés.

- $T_{r\_eq2.car}$: résoudre les équations de la forme $R_1^2(x)=k$.

La technique $\tau_{r\text{-}eq2.rac}$ consiste à appliquer le théorème (identique à celui vu en classe de troisième, cf. Figure 3) qui constitue un élément technologique. Mais, contrairement, à la classe de troisième, $R_1(x)$ peut être un polynôme de degré 1 quelconque comme le montre l'exercice résolu suivant :

Savoir résoudre une équation de la forme $x^2 = a$

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation :
$(2x-1)^2 = 9$.

Solution

$(2x-1)^2 = 9$ équivaut à :

$2x-1=-3$	ou	$2x-1=3$
$2x=-3+1$	ou	$2x=3+1$
$2x=-2$	ou	$2x=4$
$x=-\frac{2}{2}$	ou	$x=\frac{4}{2}$
$x=-1$	ou	$x=2$,

donc : $S=\{-1\,;2\}$.

Figure 16 : Repère, Seconde, 2004, p. 177

18 On trouvera en annexe 1 un extrait complet sur le développement de cet environnement technologique.

Rappelons que cet exercice était résolu par la technique de factorisation en classe de troisième et dans ce cas le second membre était un carré parfait.

Mais l'étude des exercices montre que les exercices auxquels renvoie l'auteur pour ce type d'équation sont du type $R_1(x)=x$ et les exercices où $R_1(x)$ est quelconque sont associés au type de tâches dont la technique utilise la factorisation présenté dans le paragraphe suivant.

- $T_{r\_eq2.fact}$: résoudre les équations de la forme $P_2(x) = Q_2(x)$ où les polynômes sont choisis de sorte qu'on puisse les factoriser avec les techniques vues au collège.

La technique $\tau_{r\text{-}eq2.fact}$ présentée est : on transpose tous les termes dans un même membre de l'équation, on factorise, on résout et on conclut. Pour l'étape « on factorise » le manuel précise que si aucune factorisation ne semble possible, on développe. L'examen des exercices montre que dans ce cas, on obtient une équation de degré 1 comme l'extrait suivant :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x-2)^2 - 2(x^2+4) = -(1-x)^2$.

SOLUTION

• On transpose tous les termes dans un même membre :

$$(x-2)^2 - 2(x^2+4) + (1-x)^2 = 0.$$

• On remarque qu'il n'y a aucune factorisation possible, donc on développe :

$$x^2 - 4x + 4 - 2x^2 - 8 + (1 - 2x + x^2) = 0$$
$$-x^2 - 4x - 4 + 1 - 2x + x^2 = 0$$
$$-6x - 3 = 0$$
$$-6x = 3,$$

soit $x = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$,

donc : $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Figure 17 : Repère, Seconde, 2004, p. 184

Dans ce cas, cette équation n'est pas de degré 2. Ce découpage reste cohérent étant donné que le manuel n'a pas définit les équations de degré 2 et donc a priori il ne se limite pas à ces équations. Nous ferons un choix différent dans la description de l'OM de référence.

Pour l'étape « on résout », l'élève met en œuvre la résolution d'une équation de degré 1 ou la résolution d'une équation produit ($T_{r\text{-}eq2.pn}$).

- $T_{r\_eq2.quot}$: résoudre les équations qui se ramènent à de la forme $\frac{A(x)}{B(x)}$, où A(x) et B(x) sont des polynômes de degré inférieure ou égale à 2. La technique $\tau_{r\text{-}eq2.quot}$ et un élément de technologie sont présentés dans le manuel :

5. Équation quotient

Propriété

L'équation $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$ équivaut à $A(x) = 0$ et $B(x) \neq 0$.

Pour résoudre une équation quotient, il est nécessaire de respecter les étapes de la méthode :

1 • On recherche les valeurs de x vérifiant $B(x) = 0$; les valeurs trouvées sont les valeurs interdites de l'équation.

2 • On transpose tous les termes dans un même membre de l'équation.

3 • On réduit au même dénominateur ce membre.

4 • On factorise le numérateur (éventuellement, on développe si aucune factorisation ne semble possible).

5 • On résout $A(x) = 0$.

6 • On conclut en vérifiant que les solutions trouvées ne sont pas des valeurs interdites.

Figure 18 : Repère, Seconde, 2004, p.176

Remarquons qu'à l'étape 5 on retrouve les types de tâche étudiés et plus particulièrement le type de tâches$T_{r_eq2.fact}$ et T_{r_eq1}.

iii) Hyperbole, Seconde, 2004

Ce manuel commence par définir la notion d'équation en lien avec la notion d'égalité. Il distingue les équations des identités.

Comme le manuel (Math'x, Seconde, 2004), il aborde la résolution graphique des équations du type f(x) =k et f(x)=g(x). La deuxième est traitée de la même façon, en revanche, la première est k comme une fonction constante dont la courbe est y=k et on cherche donc les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec la droite d'équation y=k. On aurait pu considérer que c'est un cas particulier de f(x)=g(x).

Pour la résolution algébrique le manuel regroupe les tâches sous l'intitulé « équation se ramenant au 1° degré ».

Nous avons reporté en annexe 1, une synthèse de l'analyse des trois manuels de la classe de seconde.

c) Classe de première

Comme le précise les programmes, on étudie « les formules usuelles donnant les racines et la forme factorisée d'un trinôme du second degré » (programmes, 1°S, 2000).

Avant l'étude des équations du second degré, les manuels introduisent la notion de fonction polynôme ainsi que la notion de degré d'une fonction polynôme. Cela permet de définir l'équation du second degré ce qu'on ne pouvait pas faire dans les classes précédentes.

La mise sous forme canonique constitue un élément technologique pour produire la technique de résolution des équations du second degré à l'aide du discriminant.

$$\boxed{\begin{array}{l} ax^2+bx+c=0 \\ \Delta = b^2-4ac \\ Si\ \ \Delta>0\ \ alors\ \ S=\left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\} \\ Si\ \ \Delta=0\ \ alors\ \ S=\left\{\dfrac{-b}{2a}\right\} \\ Si\ \ \Delta<0 alors\ \ S=\varnothing \end{array}}$$

Cette technique permet finalement de résoudre toutes les équations du second degré et vient donc compléter les techniques étudiées dans les classes précédentes. Cependant, certains manuels, comme (Math'x , PremièreS, 2005), mettent en garde l'utilisation abusive de la technique du discriminant dans le cas des équations du second degré dites « incomplètes » (les équations de la forme $ax^2+c=0\ \ ou\ \ ax^2+bx=0$)

Ce qui indique que la technique du discriminant est pertinente pour les équations de degré 2 complètes développées ou dans le cas des équations où la factorisation n'est pas évidente. On trouve ici des éléments de la technologie pratique au sens de (Castela, 2008).

d) *Synthèse*

Nous constatons un certain malaise au niveau des manuels pour définir les équations du second degré : (Diabolo-3°-2004) et (Math'x-2°-2005) évitent de le faire, (Triangle-3°-2008) la définisse de façon incomplète, (Hyperbole-2°-2004) définit ce qu'est une équation sans parler de degré (Repère-2°-2004) définit ce qu'est résoudre une équation. Cette difficulté peut s'expliquer par l'absence dans le curriculum de la notion de polynôme et du degré d'un polynôme comme c'est le cas en classe de première où on définit les notions de polynôme ou notion de fonction polynôme et son degré (Math'x-1°S-2005). On aurait pu définir en 3° et 2° qu'une équation de degré 2 est une équation telle qu'après développement et réduction on obtient une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$. On pense que ce choix n'a pas été retenu car on "s'interdit" de donner cette forme d'expression car en classes de 3° et 2° on n'étudie que certaines types d'équations donnée sous des formes qui relèvent des types ($T_{r\text{-}eq2.pn}$, $T_{r\_eq2.rac}$, $T_{r\_eq2.fact}$) et que la forme canonique ne sera abordée qu'en classe de première[19].

Nous présentons les organisations mathématiques ponctuelles à enseigner dans les classes de troisième, seconde et première que nous avons dégagées de l'analyse des manuels. Nous les présentons par les praxis associées.

En classe de troisième on étudie :

($T_{r\text{-}eq2.pn}$ / $\tau_{r\text{-}eq2.pn}$)

$T_{r\text{-}eq2.pn}$: résoudre les équations de la forme $P_1(x) \times Q_1(x)=0$ ou $P_1^2(x)=0$.

$\tau_{r\text{-}eq2.pn}$:

- appliquer la règle qu'un produit de facteur est nul si l'un des facteurs est nul
- résoudre deux équations de degré 1 qui relèvent du type de tâches$T_{r\text{-}eq1}$

($T_{r\_eq2.car}$ / $\tau_{r\text{-}eq2.rac}$)

$T_{r\_eq2.car}$: résoudre les équations de la forme x^2=a.

$\tau_{r\text{-}eq2.rac}$:

- si a est strictement positif alors l'équation a deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
- si a est nul alors l'équation admet une seule solution 0
- si a est strictement négatif alors l'équation n'admet pas de solution

($T_{r\_eq2.fact}$ / $\tau_{r\text{-}eq2.fact}$)

$T_{r\_eq2.fact}$: résoudre les équations de la forme $P_2(x) = Q_2(x)$ où les polynômes sont choisis de sorte qu'on puisse factoriser.

$\tau_{r\text{-}eq2.fact}$:

- on transpose tous les termes dans un membre, en l'occurrence à droite, pour avoir un second membre nul
- on factorise le membre de droit, pour obtenir une équation du type $T_{r\text{-}eq2.pn}$
- on traite $T_{r\text{-}eq2.pn}$

En classe de Seconde, on élargit l'étude de ces organisations mathématiques à enseigner aux organisations suivantes.

($T_{r\_eq2.quot}$ / $\tau_{r\text{-}eq2.quot}$)

---

19 Nous constatons que dans les derniers programmes (2010) on parle de fonction polynôme de degré 2.

$T_{r\_eq2.quot}$: résoudre les équations qui se ramènent à de la forme $\frac{A(x)}{B(x)}$ où A(x) et B(x) sont des polynômes de degré inférieure ou égale à 2

$\tau_{r\text{-}eq2.quot}$:

- Chercher les valeurs interdites de l'équation
- Transposer tous les termes dans un même membre de l'équation.
- Réduire au même dénominateur ce même membre.
- Factoriser le numérateur Résoudre A(x)=0
- Conclure en vérifiant que les solutions trouvées ne sont pas des valeurs interdites.

Notons que les manuels (Math'x, Seconde, 2005) et (Hyperbole, Seconde, 2004) ont regroupé les deux organisations mathématiques ponctuelles OM($T_{r\_eq2.fact}$) et OM($T_{r\_eq2.quot}$) en une seule organisation mathématique autour d'un seul type de tâche. Nous avons fait le choix de les distinguer comme le choix d'autres manuels analysés car ils se différencier au niveau de la technique (pour la prise en compte des valeurs interdite et la règle à utiliser pour le quotient) et au niveau des éléments technologiques.

En seconde, deux autres types de tâches sont étudiés, elles sont relatives à la résolution graphique : $T_{rg\text{-}eq.k}$ et $T_{rg\text{-}eq.g(x)}$.

($T_{rg\text{-}eq.k}$ / $\tau_{rg\text{-}eq.ant}$)

$T_{rg\text{-}eq.k}$: résoudre graphiquement f(x)=k

$\tau_{rg\text{-}eq.ant}$:

- Placer k sur l'axe (Ox)
- Repérer tous les points de la courbe d'ordonnée k.
- Lire leurs abscisses

($T_{rg\text{-}eq.g(x)}$ / $\tau_{rg\text{-}eq.inter}$)

$T_{rg\text{-}eq.g(x)}$ résoudre graphiquement f(x)=g(x)

$\tau_{rg\text{-}eq.inter}$:

- Repérer les points communs aux deux courbes C_f et C_g.
- Lire les abscisses de ces deux points.

Pour le type de tâches $T_{rg\text{-}eq.k}$ une autre organisation ponctuelle est proposée autour de la technique $\tau_{rg\text{-}eq.inter}$ comme le cas du manuel (Hyperbole, Seconde, 2004).

Enfin, un autre type de tâches proposé dans (Math'x, Seconde, 2005) est la résolution des équations du type $ax^2 + bx + c = 0$.

($T_{r\text{-}eq.trin}$ / $\tau_{r\text{-}eq.ga}$)

$T_{r\text{-}eq.trin}$: les équations du type $ax^2 + bx + c = 0$ dont une racine est un nombre entier et l'autre est quelconque et qui ne se prêtent pas à une factorisation immédiate par l'identité remarquable. On notera

$\tau_{r\text{-}eq.ga}$:

- Représenter la courbe de la fonction trinôme
- Résoudre graphiquement l'équation
- Vérifier algébriquement qu'au moins l'une des deux valeurs est solution de l'équation
- Factoriser (une indication est donnée pour factoriser)
- Résoudre une équation du type $T_{r\text{-}eq2.pn}$.

L'analyse des manuels a montré que très peu de tâches relèvent de ce type. De plus, l'énoncé de ces tâches prend en charge la mise en œuvre de la technique (cf. Figure 11).

C'est en classe de première qu'on étudie ce type de tâches$T_{r\text{-}eq.trin}$ par la mise en place de la technique du discriminant.

($T_{r\text{-}eq.trin}$ / $\tau_{r\text{-}eq.disc}$)

$T_{r\text{-}eq.trin}$: les équations du type $ax^2 + bx + c = 0$

$\tau_{r\text{-}eq.ga}$:

- Calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
- Si $\Delta > 0$ alors l'équation a deux solutions $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation a une seule solution $\frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solution.

III.1.4. Caractérisation de l'OM de référence pour le type de tâches visé $T_{r\text{-}eq}$

Dans le paragraphe précédent nous avons présenté l'OM à enseigner pour le type de tâches $T_{r\text{-}eq2}$: résoudre une équation polynômiale du second degré. Or, ce type de tâches prolonge d'autres types de tâches (comme la résolution des équations de degré 1) et se prolonge en d'autres types de tâches (comme la résolution des équations degré 3). Ainsi, on peut considérer que l'étude de ce type de tâches contribue à l'étude d'un type de tâches visé $T_{r\text{-}eq.}$: « résoudre une équation ». Nous proposons donc de décrire l'OM de référence de ce type de tâches visé $T_{r\text{-}eq}$ en prenant en compte la diversité des OM à enseigner dégagées dans l'analyse des manuels afin de disposer d'une carte praxéologique la plus complète pour analyser le système d'enseignement. L'élaboration de cette carte se fait sous le contrôle du savoir savant.

L'étude du type de tâches visé $T_{r\text{-}eq}$ se fait autour de plusieurs types de tâche :

$T_{rar\text{-}eq1}$: résoudre arithmétiquement une équation

$T_{rt\text{-}eq}$: résoudre par test une équation

$T_{ra\text{-}eq1}$: résoudre algébriquement une équation polynômiale du premier degré

$T_{ra\text{-}eq2}$: résoudre algébriquement une équation polynômiale du second degré

$T_{ra\text{-}eqn.}$: résoudre algébriquement une équation polynômiale de degré n supérieur ou égal à 3.

$T_{ra\text{-}eq.quot.}$: résoudre algébriquement une équation quotient.

$T_{rg\text{-}eq}$: résoudre graphiquement une équation.

Soulignons que les intitulés ci-dessus des types de tâches ne sont pas nécessairement les formulations utilisées dans l'enseignement. Par exemple, comme on l'a vu plus haut, en classe de seconde on utilise la formulation « résoudre graphiquement une équation » pour T_{rgeq} et la formulation « résoudre une équation » pour $T_{ra\text{-}eq}$. En effet, une tâche dont l'énoncé est de la forme « résoudre une équation $3x+4=5x-1$ » relève du type de tâches $T_{ra\text{-}eq}$ car il n'est pas nécessaire de préciser qu'il s'agit d'une résolution algébrique.

Les types de tâches $T_{ra\text{-}eq1.}$, $T_{ra\text{-}eq2.}$ et $T_{ra\text{-}eqn.}$ concernent les équations polynômiales c'est-à-dire les équations sous la forme $P(x)=Q(x)$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes. On désignera par $T_{ra\text{-}eq}$ l'un de ces trois sous-types de tâches.

Les types de tâches $T_{rg\text{-}eq}$ et $T_{ra\text{-}eq.quot.}$ ne sont pas spécifiques aux équations polynômiales ou à un degré donné.

A chaque type de tâches T est associé une organisation ponctuelle simple ou complexe que nous présenterons ci-dessous. Pour les décrire nous adapterons et compléterons le découpage des organisations mathématiques ponctuelles à enseigner dégagées dans l'analyse des programmes et des manuels en fonction de notre problématique de recherche. Pour les organisations mathématiques complexes nous présenterons les praxéologies ponctuelles qui peuvent être potentiellement associées au type de tâches T bien que dans certaines institutions l'ensemble des ces organisations ponctuelles ne seront pas associées à T. Ainsi, généralement on eut avoir le schéma suivant :

Soit l'organisation mathématique ponctuelle complexe de référence :

$OMPC(T)= [T ; \{OMP_1(T), OMP_2(T), OMP_3(T), OMP_4(T), OMP_5(T)\} ; \theta^T]$

- Soit I_1 et I_2 deux institutions (par exemple, deux manuels ou deux classes différentes). On peut avoir dans I_1 : $OMPC(T)= [T ; \{OMP_1(T), OMP_2(T), OMP_3(T)\} ; \theta^T]$ et dans I_2 : $OMPC(T)= [T ; \{OMP_2(T), OMP_3(T), OMP_5(T)\} ; \theta^T]$.

- De la même façon, l'OMPC(T) peut changer dans le temps.

Dans le paragraphe précédent nous avons présenté le cas des équations du second degré. Pour les autres types de tâches nous avons fait une analyse des manuels mais pas de façon approfondie. L'objectif est de donner une idée de ce que peut être une carte praxéologique autour d'un type de tâches visé dans l'enseignement secondaire.

De plus, nous ne sommes pas restreints seulement aux types de tâche enseignés actuellement. Nous avons élargi à des types de tâches qui ont existé ou qui pourront exister dans l'enseignement. Une fois cette carte complétée, on peut en extraire des parties qui correspondent à ce qui en vigueur dans l'enseignement à un moment donné et/ou un niveau donné.

Les techniques sont décrites au niveau générique. Dans le cas où le type de tâches qui intervient dans la description de la technique a une organisation mathématique simple, nous présenterons la praxis associée. Les praxis élémentaires sont indiquées en italiques.

Dans la description des technologies on se limitera essentiellement à donner les éléments importants de la composante théorique de la technologie.

Dans l'enseignement, les équations portent sur les expressions algébriques dans une égalité. Leur traitement repose sur le calcul littéral pour transformer les expressions (développement, factorisation,…) et sur les règles de conservation des égalités. C'est ce qui va générer en grande partie les technologies des types de tâches qu'on va étudier. Il est important de préciser sur quels objets transposés on travaille dans l'enseignement pour construire l'OM de référence. Certes l'étude des équations dans l'enseignement ne porte pas sur les polynômes ce qui aurait généré d'autres technologies mais sur des objets qui sont des transposés des polynômes comme le précise (Croset, M.C. 2009, p.55) : « L'objet polynôme n'y est certes pas défini mais des objets tels que expressions littérales, variable ou terme semblable semblent être les transposés des objets polynômes, indéterminée ou monôme du monde savant. Les traitements qui permettent de maintenir la dénotation et qui sont régis par les lois de l'anneau R[X] y sont présentés sous forme de règles algorithmiques ». Mais ces règles vont être présentées implicitement comme une généralisation des règles sur des nombres à des expressions algébriques. Par exemple en classe de 4°, la technique du développement des expressions algébriques est justifiée par la propriété de la double distributivité (cf. Figure 19). Cette propriété porte sur les nombres relatifs permet de justifier la technique pour développer $(3x\text{-}5)(\text{-}2x\text{+}4)$ en considérant les différents termes $3x$ et $-2x$ comme des nombres relatifs. Nous avons évoqué ce point dans l'analyse du manuel (Repère, Seconde, 2004, page 27) à propos du produit nul.

Dans la description des technologies des praxéologies relatives aux types de tâche de résolution algébrique des équations nous considérons comme élément technologique « considérer une expression algébrique comme un nombre généralisé ». Nous ne préciserons pas cet élément dans les paragraphes suivants.

5. Développer en utilisant la double distrubutivité

PROPRIÉTÉ

Quels que soient les nombres relatifs a, b c et d, on a :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

→ **Exemple :** Développer et réduire si possible B = $(3x - 5)(- 2x + 4)$

On utilise la double distributivité en appliquant la règle des signes du produit :

B = $(3x - 5) \times (- 2x + 4)$

B = $3x \times (- 2x) + 3x \times (+ 4) - 5 \times (- 2x) - 5 \times (+ 4)$

B = $- 6x^2 + 12x + 10x - 20$ On réduit l'expression.

B = $- 6x^2 + 22x - 20$.

Figure 19 : Triangle, 4°, 2007. p.31

a) Organisation mathématique ponctuelle complexe OMPC($\mathbf{T_{rar\text{-}eq1}}$*)*

Ce type de tâches $T_{rar\text{-}eq}$ n'est pas enseigné actuellement mais il a été dans les programmes de 1995 et comme le montre l'extrait suivant la résolution est basée sur la notion de quotient.

RETENIR

■ a et b sont des décimaux connus et a est différent de 0.
x est un nombre inconnu.
La solution de l'équation $a \times x = b$ est le quotient de b par a.
Il se note $b : a$ ou $\frac{b}{a}$; $\frac{b}{a}$ est l'écriture fractionnaire du quotient ; b est le numérateur et a le dénominateur.

Figure 20 : Alpha, Math 5°, Hatier, p. 21

$T_{rar\text{-}eq1}$ admet 3 organisations ponctuelles donc :

$\text{OMPC}(T_{rar\text{-}eq1})= [T_{rar\text{-}eq1} ; \{\text{OMP}_1(T_{rar\text{-}eq1}), \text{OMP}_2(T_{rar\text{-}eq1}), \text{OMP}_3(T_{rar\text{-}eq1})\} ; \theta^T]$

i) Caractérisation de $OMP_1(T_{rar\text{-}eq1})$

$OMP_1(T_{rar\text{-}eq1}) = (T_{rar\text{-}eq1.1}, \tau_{rar\text{-}eq1.1}, \theta_{mult}, \Theta_{ar})$	
$T_{rar\text{-}eq1.1}$	résoudre l'équation ax=b (a non nul)
$\tau_{rar\text{-}eq1.1}$	La solution de l'équation est b:a
θ_{mult}	Le quotient de b par a est le nombre qui multiplié par a donne b.
Θ_{ar}	Arithmétique élémentaire

ii) Caractérisation de $OMP_2(T_{rar\text{-}eq1})$

$OMP_2(T_{rar\text{-}eq1}) = (T_{rar\text{-}eq1.2}, \tau_{rar\text{-}eq1.2}, \theta_{ad}, \Theta_{ar})$	
$T_{rar\text{-}eq1.2}$	résoudre l'équation a+x=b
$\tau_{rar\text{-}eq1.2}$	La solution de l'équation est b-a
θ_{ad}	La différence de b par a est le nombre ajouté à a donne b.
Θ_{ar}	Arithmétique élémentaire

iii) Caractérisation de $OMP_3(T_{rar\text{-}eq1})$

$OMP_3(T_{rar\text{-}eq1}) = (T_{rar\text{-}eq1.3}, \tau_{rar\text{-}eq1.3}, \theta_{mult\text{-}ad}, \Theta_{ar})$	
$T_{rar\text{-}eq1.3}$	résoudre l'équation ax+b=c
$\tau_{rar\text{-}eq1.3}$	$\tau_{rar\text{-}eq1.3} = (T_{rar\text{-}eq1.2}, T_{rar\text{-}eq1.1})$
$\theta_{mult\text{-}ad}$	θ_{ad} et θ_{mult}
Θ_{ar}	Arithmétique élémentaire

b) *Organisation mathématique ponctuelle simple OMP($T_{rt\text{-}eq}$)*

Il existe une seule organisation mathématique ponctuelle de $T_{rt\text{-}eq}$: OMP($T_{rt\text{-}eq}$). Nous considérons ce type de tâches comme élémentaire ainsi que sa technique.

$OMP(T_{rt\text{-}eq}) = (T_{rt\text{-}eq}, \tau_{t\text{-}eg}, \theta_{eq}, \Theta_{ar})$	
$T_{rt\text{-}eq}$	Montrer qu'un nombre est solution d'une équation
$\tau_{t\text{-}eg}$	Remplacer l'inconnue par un nombre et vérifier que l'égalité est vraie.
θ_{eq}	Définition de solution d'une équation.
Θ_{ar}	Arithmétique élémentaire

c) *Organisation mathématique ponctuelle simple OMP($T_{ra\text{-}eq1}$)*

Il existe une seule organisation mathématique ponctuelle de $T_{ra\text{-}eq1}$: OMP($T_{ra\text{-}eq1}$).

Exemple de tâche : résoudre l'équation $5(x+1) = 2-(3x-1)$

OMP($T_{ra\text{-}eq1}$) = ($T_{ra\text{-}eq1}$, $\tau_{r\text{-}aeq1}$, $\theta_{r\text{-}aeq1}$, Θ_{alg})	
$T_{ra\text{-}eq1}$	Résoudre les équations de la forme $P_1(x)=Q_1(x)$ où $P_1(x)$ et $Q_1(x)$ sont des polynômes de degré 1.
$\tau_{ra\text{-}eq1}$	$\tau_{r\text{-}eq1}$ = (T_{dev}, $T_{mvt\text{-}ad\text{-}eg}$, T_{red}, $T_{mvt\text{-}mult\text{-}eg}$, $T_{test.eg}$) où : T_{dev} : développer les deux membres (si nécessaire) $T_{mvt\text{-}adt}$: transposer les termes en x dans un membre et les termes constants dans un autre membre (si nécessaire) T_{red} : réduire les deux membres (si nécessaire) $T_{mvt\text{-}mult}$: transposer le facteur de x dans l'autre membre. $T_{test.eg}$: tester l'égalité avec la valeur trouvée.
$\theta_{r\text{-}aeq1}$	$\theta_{eq\text{-}eq}$: Equivalence des équations par transposition additive des termes ou multiplicative des facteurs (pour les types de tâche $T_{mvt\text{-}adt}$ et $T_{mvt\text{-}mult}$). $\theta_{eg\text{-}exp}$: Une expression algébrique égale à une autre expression algébrique obtenue par l'une des transformations : factorisation, développement et réduction (pour les types de tâches T_{dev} et T_{red}).
Θ_{alg}	Algèbre (élémentaire)

Les types de tâches T_{dev} et T_{red} ont leurs propres organisations mathématiques complexes que nous ne présentons pas ici.

Les deux types de tâche $T_{mvt\text{-}ad\text{-}eg}$ et $T_{mvt\text{-}mult\text{-}eg}$ sont intrinsèques et on les considère comme élémentaires. Leurs organisations mathématiques sont définies par :

OMP($T_{mvt\text{-}ad\text{-}eg}$) = ($T_{mvt\text{-}ad\text{-}eg}$, $\tau_{mvt\text{-}ad\text{-}eg}$, $\theta_{cons\text{-}eg\text{-}ad}$, Θ_{alg})	
$T_{mvt\text{-}ad\text{-}eg}$	Transposer un terme d'un membre d'une égalité à l'autre.
$\tau_{mvt\text{-}ad\text{-}eg}$	Ajouter l'opposé d'un terme aux deux membres de l'égalité. Souvent, quand la technique devient routinière elle s'exprime par : si a+b=c alors a=c-b.
$\theta_{cons\text{-}eg\text{-}ad}$	On ne change pas une égalité en ajoutant ou en soustrayant le même nombre à chacun de ces membres.
Θ_{alg}	Algèbre (élémentaire)

OMP($T_{mvt\text{-}mult}$) = ($T_{mvt\text{-}mult\text{-}eg}$, $\tau_{mvt\text{-}mult\text{-}eg}$, $\theta_{cons\text{-}eg\text{-}ad}$, Θ_{alg})	
$T_{mvt\text{-}mult\text{-}eg}$	Transposer un facteur d'un membre d'une égalité à l'autre.
$\tau_{mvt\text{-}mult\text{-}eg}$	Multiplier par l'inverse d'un facteur les deux membres de l'égalité. Souvent, quand la technique devient routinière elle s'exprime par : si ab=c alors a=c/b (b non nul) ou si a/b=c alors a=bc (b non nul)
$\theta_{cons\text{-}eg\text{-}mult}$	On ne change pas une égalité en multipliant ou en divisant chacun de ces membres par un même nombre non nul.

Θ_{alg}	Algèbre (élémentaire)

Comme nous l'avons dit plus haut, nous n'avons pas explicité l'élément « considérer une expression algébrique comme un nombre réel généralisé » dans la description des technologies $\theta_{cons\text{-}eg\text{-}ad}$ et $\theta_{cons\text{-}eg\text{-}mult}$.

Dans la technologie $\theta_{r\text{-}aeq1}$ nous n'avons pas présenté les technologies spécifiques aux types de tâche qui interviennent dans la description au niveau 1 de la technique $\tau_{ra\text{-}eq1}$ car celles-ci interviennent au niveau 2 dans la mise en œuvre des techniques de ces types de tâches. Ainsi, il n'est pas pertinent d'évoquer la[20] technologie du type de tâches de développement T_{dev}. En revanche, nous présentons des éléments de la technologie qui sont plus spécifiques au type de tâches $T_{ra\text{-}eq1}$. Pa exemple, l'équivalence des équations suite aux transpositions des termes ou des facteurs est un élément important car il nous garantit que les solutions de l'équation transformée sont les solutions de l'équation de départ, qu'il ne convient pas de confondre avec les technologies $\theta_{cons\text{-}eg\text{-}ad}$ et $\theta_{cons\text{-}eg\text{-}mult}$ qui sont spécifiques à la notion d'égalité. C'est le principe que nous avions présenté dans la description de la technologie présenté dans le paragraphe II.

d) *Organisation mathématique ponctuelle complexe OMPC($T_{ra\text{-}eq2}$)*

L'organisation mathématique ponctuelle complexe est définie par

OMPC($T_{ra\text{-}eq2}$) = [$T_{ra\text{-}eq2}$; {OMP$_1$($T_{ra\text{-}eq2}$), OMP$_2$($T_{ra\text{-}eq2}$), OMP$_3$($T_{ra\text{-}eq2}$), OMP$_4$($T_{ra\text{-}eq2}$), OMP$_5$($T_{ra\text{-}eq2}$), OMP$_6$($T_{ra\text{-}eq2}$)} ; θ^T]

i) Caractérisation de OMP$_1$($T_{rg\text{-}eq2}$)

OMP$_1$($T_{ra\text{-}eq2}$) = ($T_{ra\text{-}eq2.pn}$, $\tau_{ra\text{-}eq2.pn}$, $\theta_{ra\text{-}eq2.pn}$, Θ_{alg})	
$T_{ra\text{-}eq2.pn}$	résoudre les équations de la forme $P_1(x)\times Q_1(x)=0$ ou $P_1^2(x)=0$
$\tau_{ra\text{-}eq2.pn}$	$\tau_{r\text{-}eq2.pn} = (T_{pn}\ ;\ T_{r\text{-}eq1})$ où : T_{pn} : appliquer la règle du produit : un produit de facteur est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. C'est un type de tâches intrinsèque. $T_{r\text{-}eq1}$: résoudre deux équations de degré 1.
$\theta_{ra\text{-}eq2.pn}$	La règle du produit nul est valable pour les expressions algébriques ce qui permet d'avoir une équivalence des équations.
Θ_{alg}	Algèbre

Exemple de tâche : résoudre $(x-1)(x+3)=0$

Le type de tâches $T_{r\text{-}eq1}$ a sa propre organisation mathématique ponctuelle complexe OMPC($T_{r\text{-}eq1}$). Le type de tâches T_{pn} est intrinsèque et on le considère comme élémentaire. Son organisation mathématique est définie par :

OMP(T_{pn}) = (T_{pn}, τ_{pn}, θ_{pn}, Θ)	
T_{pn}	Appliquer la règle : un produit de facteur est nul si l'un des facteurs est nul.
τ_{pn}	Si a*b=0 alors a=0 ou b=0

[20] ou "les" s'il y a plusieurs techniques

θ_{pn}	R est un corps.
Θ_{alg}	Algèbre (théorie des corps)

La technique τ_{pn} consiste à mettre en œuvre la règle du produit nul. Nous considérons la praxis P_{pn}= (T_{rpn} τ_{pn}) comme élémentaire.

ii) Caractérisation de $OMP_2(T_{ra\text{-}eq2})$

OMP2(Tra-eq2) = ($T_{ra\text{-}eq2.car}$, $\tau_{ra\text{-}eq2.rac}$, θ_{rac}, Θ)	
$T_{ra\_eq2.car}$	résoudre les équations de la forme x^2=a
$\tau_{ra\text{-}eq2.rac}$	$\tau_{r\text{-}eq2.rac}$ est une technique élémentaire. - si a est strictement positif alors l'équation a deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ - si a est nul alors l'équation admet une seule solution 0 - si a est strictement négatif alors l'équation n'admet pas de solution
$\theta_{rg\text{-}eq.ant}$	Définition de la racine carrée.
Θ_{nb}	Ensemble des nombres

Nous considérons la praxis $P_{r\_eq2.car}$= ($T_{r\text{-}eq2.car}$, $\tau_{r\text{-}eq2.rac}$) comme élémentaire.

iii) Caractérisation de $OMP_3(T_{ra\text{-}eq2})$

$OMP_3(T_{ra\text{-}eq2})$ = ($T_{ra\text{-}eq2.car.c}$, $\tau_{ra\text{-}eq2.rac.c}$, $\theta_{ra\text{-}eq2.rac.c}$, Θ)	
$T_{ra\_eq2.car.c}$	Résoudre les équations de la forme $(Q_1(x))^2$=a où $Q_1(x)$ est un polynôme de degré 1.
$\tau_{ra\text{-}eq2.rac.c}$	$\tau_{r\text{-}eq2.rac.c}$ = ($T_{r\text{-}eq2.car}$, $T_{r\text{-}eq1}$)
$\theta_{ra\text{-}eq2.rac.c}$	L'équation $(Q_1(x))^2$=a est équivalente à $Q_1(x)$=X et X^2=a
Θ_{alg}	Algèbre élémentaire

Exemple de tâche : résoudre $(2x-1)^2 = 5$

iv) Caractérisation de $OMP_4(T_{ra\text{-}eq2})$

$OMP_4(T_{ra\text{-}eq2})$ = ($T_{ra\text{-}eq2.fact}$, $\tau_{ra\text{-}eq2.fact}$, $\theta_{ra\text{-}eq2.fact}$, Θ_{alg})	
$T_{ra\text{-}eq2.fact}$	Résoudre les équations de la forme $P_2(x) = Q_2(x)$ où les polynômes sont choisis de sorte qu'on puisse factoriser
$\tau_{ra\text{-}eq2.fact}$	$\tau_{r\text{-}eq2.fact}$ = ($T_{mvt\text{-}ad}$, T_{fact}, $T_{r\text{-}eq2.pn}$) où : $T_{mvt\text{-}ad}$: on transpose tous les termes dans un membre pour avoir un second membre nul T_{fact} : on factorise le membre de droite, pour obtenir une équation du type $T_{r\text{-}eq2.pn}$
$\theta_{r\text{-}eq2.fact}$	$\theta_{eq\text{-}eq}$: Equivalence des équations par transposition additive des termes ou multiplicative des facteurs (pour les types de tâche $T_{mvt\text{-}ad}$). $\theta_{eg\text{-}exp}$: Une expression algébrique égale à une autre expression algébrique obtenue par l'une des transformations : factorisation, développement et réduction (pour les types de tâches T_{fact}).

Θ_{alg}	Algèbre élémentaire

Exemple de tâche : résoudre $(x-1)(x+3)+(x-1)(x+4)=0$

v) Caractérisation de $OMP_5(T_{ra\text{-}eq2})$

$OMP_5(T_{rg\text{-}eq2}) = (T_{ra\text{-}eq.trin}\ ,\ \tau_{ra\text{-}eq2.disc},\ \theta_{ra\text{-}eq2.disc},\ \Theta)$	
$T_{ra\text{-}eq.trin}$	Résoudre les équations du type $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont non nuls et de sorte que le trinôme ne se factorise pas par une identité remarquable.
$\tau_{ra\text{-}eq2.disc}$	$\tau_{ra\text{-}eq2.disc}$ est une technique élémentaire. - Calculer le discriminant $\Delta = b^2-4ac$ - Si $\Delta > 0$ alors l'équation a deux solutions $\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ - Si $\Delta = 0$ alors l'équation a une seule solution $\dfrac{-b}{2a}$ - Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solution.
$\theta_{ra\text{-}eq2.disc}$	La technique $\tau_{ra\text{-}eq2.disc}$ est produite et justifiée par la mise en place d'une praxis élémentaire (T_{fcan}, τ_{fcan}) où T_{fcan} : écrire le trinôme sous forme canonique et de résoudre ensuite l'équation obtenue.
Θ_{alg}	Algèbre élémentaire

Exemple de tâche : résoudre $6x^2-3x-4=0$

vi) Caractérisation de $OMP_6(T_{ra\text{-}eq2})$

$OMP_6(T_{ra\text{-}eq2}) = (T_{ra\text{-}eq2.dev\text{-}trin.}\ ,\ \tau_{ra\text{-}eq2.devdisc},\ \theta_{a\text{-}eq2.dev.disc},\ \Theta)$	
$T_{ra\text{-}eq2.dev}$	Résoudre les équations de la forme $P_2(x) = Q_2(x)$ où les polynômes sont choisis de sorte qu'on ne puisse pas factoriser (sans passer par la forme canonique).
$\tau_{ra\text{-}eq2.devdisc}$	$\tau_{ra\text{-}eq2.devdisc} = (T_{dev},\ T_{mvt\text{-}ad}\ ,\ T_{red},\ T_{ra\text{-}eq.trin})$ où : T_{dev} : on développe si nécessaire $T_{mvt\text{-}ad}$: on transpose tous les termes dans un membre pour avoir un second membre nul. Cette étape est absente si $Q_2(x)$ est nul. T_{red} : on réduit $T_{ra\text{-}eq.trin}$: on résout l'équation par le discriminant.
$\theta_{ra\text{-}eq2.disc}$	$\theta_{eq\text{-}eq}$: Equivalence des équations par transposition additive des termes ou multiplicative des facteurs (pour les types de tâche $T_{mvt\text{-}ad}$). $\theta_{eg\text{-}exp}$: Une expression algébrique égale à une autre expression algébrique obtenue par l'une des transformations : factorisation, développement et réduction (pour les types de tâches T_{dev} et T_{red}).
Θ_{alg}	Algèbre élémentaire

Exemple de tâche : résoudre $5x^2+2(x-\frac{1}{2})=-x^2+x$

e) *Organisation mathématique ponctuelle complexe OMPC($T_{ra\_eq.n}$)*

On considère les équations de degré supérieur ou égal à 3. Deux types d'équations peuvent être résolues algébriquement au niveau secondaire[21] :

$T_{\text{ra-eq.bicare}}$: résoudre les équations bicarrées $ax^4 + bx^2 + c = 0$

$T_{\text{ra-eqn.rac.evid}}$: résoudre les équations de degré n (n>=3) ayant (n-2) racines évidentes.

L'organisation mathématique ponctuelle complexe est définie par

OM($T_{\text{ra-eqn}}$) = {OMP$_1$($T_{\text{ra-eqn}}$), OMP$_2$($T_{\text{ra-eqn}}$)}.

i) Caractérisation de OMP$_1$($T_{\text{ra-eqn}}$)

OMP$_1$($T_{\text{rg-eqn}}$) = ($T_{\text{ra-eq.bicar}}$, $\tau_{\text{ra-eq.bicar.chagtV}}$, $\theta_{\text{ra-eq.bicar.chagtV}}$, Θ)	
$T_{\text{ra-eq.bicar}}$	Résoudre les équations de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$ avec a et c non nuls.
$\tau_{\text{ra-eq.bicar.chagtV}}$	$\tau_{\text{ra-eq.bicar.chagtV}}$ = (T_{chgtV} , $T_{\text{ra-eq.trin}}$, $T_{\text{ra-eq2.car}}$) où : T_{chgtV} : effectuer un changement de variable $u = x^2$. $T_{\text{ra-eq.trin}}$: résoudre les équations du type $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont non nuls. $T_{\text{ra-eq2.car}}$: résoudre les équations de la forme $x^2 = a$
$\theta_{\text{ra-eq.bicar.chagtV}}$	L'équation $ax^4 + bx^2 + c = 0$ est équivalente au système $\begin{cases} au^2 + bu + c = 0 \\ u = x^2 \end{cases}$
Θ_{alg}	Algèbre

Exemple de tâche : résoudre $x^4 + x^2 - 20 = 0$

T_{chgtV} est un type de tâches intrinsèque.

On voit que la description de la technique $\tau_{\text{ra-eq.bicar.chagtV}}$ au niveau générique 1 est composée de types de tâches intrinsèques. Nous sommes dans un cas où on peut décrire cette technique au niveau générique 2.

ii) Caractérisation de OMP$_2$($T_{\text{ra-eqn}}$)

OMP$_2$($T_{\text{rg-eqn}}$) = ($T_{\text{ra-eqn.fat}}$, $\tau_{\text{ra-eqn.fact}}$, $\theta_{\text{ra-eqn.fact}}$, Θ)	
$T_{\text{ra-eqn.fact}}$	Résoudre les équations de degré n (n>=3) pouvant être factorisées.
$\tau_{\text{ra-eqn.fact}}$	$\tau_{\text{ra-eqn.fact}}$ = ($T_{\text{mvt-ad}}$, T_{fact}, $T_{\text{ra-eqn.pn}}$) où : $T_{\text{mvt-ad}}$: on transpose tous les termes dans un membre pour avoir un second membre nul (si c'est nécessaire) T_{fact} : factoriser un polynôme $T_{\text{ra-eqn.pn}}$: résoudre une équation de produit nul de polynômes de degrés 1 ou 2.

21 Comme ces équations sont très peu étudiées en secondaire, on se contentera de présenter deux sous-types de tâches associés. Il est évident que d'autres sous-types de tâche peuvent être étudiés.

$\theta_{\text{ra-eqn.fact}}$	$\theta_{\text{eq-eq}}$: Equivalence des équations par transposition additive des termes ou multiplicative des facteurs (pour les types de tâche $T_{\text{mvt-ad}}$). $\theta_{\text{eg-exp}}$: Une expression algébrique égale à une autre expression algébrique obtenue par l'une des transformations : factorisation, développement et réduction (pour les types de tâches T_{fact}).
Θ_{alg}	Algèbre

Exemples de deux tâches :

t_1 : résoudre $(x^2-1)(x^2+x-12)-(x+1)(x-3)=0$

t_2 : résoudre $x^3-2x^2-x+2=0$

Ces deux tâches relèvent bien du type de tâches$T_{\text{ra-eqn.fat}}$ mais elles se différentient au niveau de la technique par la tâche de factorisation T_{fact}. Ainsi pour t_2, il faut chercher la racine évidente et ensuite factoriser soit par la division euclidienne des polynômes ou par identification. Alors pour t_1 il faut faire une factorisation partielle (du facteur x^2-1) puis factoriser le membre de gauche par $x+1$. On peut également envisager comme technique de recherche de la racine évidente se fasse par une technique graphique. Ces différents cas sont pris en charge par les organisations ponctuelles du type de tâches T_{fact}

f) Organisation mathématique ponctuelle simple OMP($T_{ra\_eq.quot}$)

L'organisation mathématique de $T_{\text{ra-eq.quot}}$ est simple, elle est réduite à une seule organisation ponctuelle OMP($T_{\text{ra-eq.quot}}$)

OMP($T_{\text{ra-eq.quot}}$)= ($T_{\text{ra-eq.quot}}$, $\tau_{\text{ra-eq.quot}}$, $\theta_{\text{ra-eq.quot}}$, Θ)	
$T_{\text{ra-eq.quot}}$	Résoudre les équations qui se ramènent à la forme $\frac{A(x)}{B(x)}=0$ où A(x) et B(x) sont des polynômes.
$\tau_{\text{ra-eq.quot}}$	$\tau_{\text{ra-eq.quot}}$ = ($T_{\text{val-int}}$, $T_{\text{mvt-ad}}$, T_{red} , T_{qn} , $T_{\text{ra\_eq}}$, $T_{\text{verif-int}}$) où : $T_{\text{val-int}}$: Chercher les valeurs interdites de l'équation $T_{\text{mvt-ad}}$: Transposer tous les termes dans un même membre de l'équation. T_{red} : Réduire au même dénominateur ce même membre. T_{qn} : Appliquer la règle du quotient nul. $T_{\text{ra\_eq}}$: Résoudre une équation du second degré ou du premier degré. $T_{\text{verif-int}}$: Conclure en vérifiant que les solutions trouvées ne sont pas des valeurs interdites.
$\theta_{\text{ra-eq.quot}}$	$\theta_{\text{eq-eq}}$: Equivalence des équations par transposition additive des termes ou multiplicative des facteurs (pour les types de tâche $T_{\text{mvt-ad}}$). $\theta_{\text{eg-exp}}$: Une expression algébrique égale à une autre expression algébrique obtenue par l'une des transformations : factorisation, développement et réduction (pour les types de tâches T_{red}). $\theta_{\text{quot.nul}}$: Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et dénominateur non nul.

Θ_{alg}	Algèbre

Les types de tâches $T_{val\text{-}int}$, T_{red} , T_{ra_eq} ont leur propre organisation mathématiques complexe.

Le type de tâches T_{qn} est intrinsèque et sa technique τ_{nn} consiste à mettre en œuvre cette règle. La praxis associée P_{pn} est considérée comme élémentaire.

Le type de tâches $T_{verif\text{-}int}$ est intrinsèque et sa technique consiste à vérifier si les solutions trouvées sont bien dans l'ensemble de définition de l'équation. Nous la considérons comme élémentaire.

g) Organisation mathématique ponctuelle complexe OMPC($T_{rg\text{-}eq}$)

L'organisation mathématique ponctuelle complexe est définie par

OMPC($T_{rg\text{-}eq}$) = [$T_{ra\text{-}eq2}$; {OMP$_1$($T_{rg\text{-}eq}$), OMP$_2$($T_{rg\text{-}eq}$), OMP$_3$($T_{rg\text{-}eq}$)} ; θ^T]

i) Caractérisation de OMP$_1$($T_{rg\text{-}eq}$)

OMP$_1$($T_{rg\text{-}eq}$) = ($T_{rg\text{-}eq.k}$, $\tau_{rg\text{-}eq.ant}$, $\theta_{rg\text{-}eq.ant}$, Θ)	
$T_{rg\text{-}eq.k}$	Résoudre graphiquement f(x)=k
$\tau_{rg\text{-}eq.ant}$	$\tau_{rg\text{-}eq.ant}$ = ($T_{dg\text{-}ant}$) où : $T_{dg\text{-}ant}$: déterminer graphiquement l'antécédent d'un nombre
$\theta_{rg\text{-}eq.ant}$	$\theta_{rg\text{-}eq.ant}$ Par un changement de cadre, interpréter une équation algébrique à l'aide d'une relation fonctionnelle. Ce changement de cadre nous permet d'affirmer que les solutions de l'équation f(x)=k sont les mêmes que les antécédents de k par f. Graphiquement, cela se traduit par la recherche des abscisses des points de la courbe représentative de f dont l'ordonnée est k. Le degré de l'équation indique un nombre maximum de solution.
$\Theta_{analyse}$	Analyse

Le type de tâches $T_{dg\text{-}ant}$ admet une organisation mathématique complexe constituée de trois organisations ponctuelles dont les sous-types de tâche se distinguent essentiellement par l'accès à la courbe de f. Nous présentons les praxis associées.

($T_{dg\text{-}ant.1}$, $\tau_{dg\text{-}ant.1}$)

- $T_{dg\text{-}ant.1}$: déterminer graphiquement l'antécédent d'un nombre dans l'environnement papier crayon.

- $\tau_{dg\text{-}ant.1}$= ($T_{Tr\text{-}courbe}$, $T_{pt/axe}$, $T_{pt\text{-}courbe\text{-}ord}$)

  - $T_{Tr\text{-}courbe}$: Tracer la courbe de f si elle n'est pas donnée.
  - $T_{pt/axe}$: Placer un point k sur l'axe des ordonnées,
  - $T_{pt\text{-}courbe\text{-}ord}$: Déterminer les points de la courbe de f qui ont pour ordonnée k,

Les praxis $P_{pt/axe}$ et $P_{pt\text{-}courbe\text{-}ord}$ sont intrinsèques. On les considère comme élémentaires.

Le type de tâches $T_{Tr\text{-}courbe}$ est extrinsèque. Il admet sa propre organisation mathématique complexe.

($T_{dg\text{-}ant.2}$, $\tau_{dg\text{-}ant.2}$)

- $T_{dg\text{-}ant.2}$: déterminer graphiquement l'antécédent d'un nombre en utilisant la calculatrice.

- $\tau_{dg\text{-}ant.2}$= ($T_{C\text{-}fct}$, $T_{C\text{-}Tr\text{-}courbe}$, $T_{C\text{-}trace}$)

  - $T_{C\text{-}fct}$: Entrer l'expression de la fonction.
  - $T_{C\text{-}Tr\text{-}courbe}$: Afficher la courbe de f (avec paramétrage de la fenêtre),
  - $T_{C\text{-}trace}$: utiliser la fonction trace pour déterminer l'abscisse des points de la courbe de f qui ont pour ordonnée k.

Nous considérons ces types de tâche et donc les praxis associées comme intrinsèques et donc élémentaires. Comme la technique est décrite que par des praxis élémentaires, on peut écrire $\tau_{dg\text{-}ant.2}$= ($P_{C\text{-}fct}$, $P_{C\text{-}Tr\text{-}courbe}$, $P_{C\text{-}trace}$)

($T_{dg\text{-}ant.3}$, $\tau_{dg\text{-}ant.3}$)

- $T_{dg\text{-}ant.3}$: déterminer graphiquement l'antécédent d'un nombre dans le cas où la courbe représentative est donnée.

- $\tau_{dg\text{-}ant.3}$= ($T_{pt/axe}$, $T_{pt\text{-}courbe\text{-}ord}$)

  - $T_{pt/axe}$: Placer un point k sur l'axe des ordonnées,
  - $T_{pt\text{-}courbe\text{-}ord}$: Déterminer les points de la courbe de f qui ont pour ordonnée k,

Comme la technique est décrite que par des praxis élémentaires on peut écrire $\tau_{dg\text{-}ant.3}$= ($P_{pt/axe}$, $P_{pt\text{-}courbe\text{-}ord}$)

Remarquons, qu'en classe de Seconde nous avons essentiellement le cas ($T_{dg\text{-}ant.3}$, $\tau_{dg\text{-}ant.3}$).

ii) <u>Caractérisation de OMP_2($T_{rg\text{-}eq.k}$)</u>

$OMP_2(T_{rg\text{-}eq.k}) = (T_{rg\text{-}eq.k}, \tau_{rg\text{-}eq.int}, \theta_{rg\text{-}eq.int}, \Theta)$	
$T_{rg\text{-}eq.k}$	Résoudre graphiquement f(x)=k
$\tau_{rg\text{-}eq.int}$	$\tau_{rg\text{-}eq.int}$ = ($T_{dg\text{-}int}$) où : $T_{dg\text{-}int}$: déterminer graphiquement les abscisses qui ont même image par deux fonctions.
$\theta_{rg\text{-}eq.int}$	Par un changement de cadre, interpréter une équation algébrique à l'aide d'une relation fonctionnelle. Ce changement de cadre nous permet d'affirmer que les solutions de l'équation f(x) = g(x) sont les nombres qui ont la même image par f et g.
$\Theta_{analyse}$	Analyse

Le type de tâches $T_{dg\text{-}int}$ admet une organisation mathématique complexe constituée de trois organisations ponctuelles dont les sous-types de tâche se distinguent essentiellement par l'accès aux courbes f et g. Nous présentons les praxis associées.

($T_{dg\text{-}int}$, $\tau_{dg\text{-}int.1}$)

- $T_{dg\text{-}int.1}$: déterminer graphiquement les abscisses qui ont même image par deux fonctions dans l'environnement papier crayon.

- $\tau_{dg\text{-}int.1} = (T_{Tr\text{-}courbe}, T_{pt/axe}, T_{pt\text{-}courbe\text{-}ord})$

- $T_{Tr\text{-}courbe}$: Tracer les courbes de f et de g.
- $T_{pt/int/courbe}$: Repérer les points d'intersections des courbes,
- $T_{absc\text{-}point}$: Déterminer les abscisses de ces points,

Les types de tâche $T_{pt/int/courbe}$ et $T_{absc\text{-}point}$ et les praxis associées sont intrinsèques. On les considère comme élémentaires.

($T_{dg\text{-}int.2}$, $\tau_{dg\text{-}int.2}$)

- $T_{dg\text{-}int.2}$: déterminer graphiquement les abscisses qui ont même image par deux fonctions en utilisant la calculatrice.

- $\tau_{dg\text{-}int.2} = (T_{C\text{-}fct}, T_{C\text{-}Tr\text{-}courbe}, T_{C\text{-}trace})$ ou $(P_{C\text{-}fct}, P_{C\text{-}Tr\text{-}courbe}, P_{C\text{-}trace})$

($T_{dg\text{-}int.3}$, $\tau_{dg\text{-}int.3}$)

- $T_{dg\text{-}int.3}$: déterminer graphiquement les abscisses qui ont même image par deux fonctions dans le cas où la courbe représentative est donnée.

- $\tau_{dg\text{-}int.3} = (T_{pt/axe}, T_{pt\text{-}courbe\text{-}ord})$ ou $(P_{pt/axe}, P_{pt\text{-}courbe\text{-}ord})$

iii) Caractérisation de $OMP_3(T_{rg\text{-}eq.g(x)})$

$OMP_3(T_{rg\text{-}eq.g(x)}) = (T_{rg\text{-}eq.g(x)}, \tau_{rg\text{-}eq.int}, \theta_{rg\text{-}eq.int}, \Theta)$	
$T_{rg\text{-}eq.g(x)}$	Résoudre graphiquement f(x)=g(x)
$\tau_{rg\text{-}eq.int}$	$\tau_{rg\text{-}eq.int} = (T_{dg\text{-}int})$ où $T_{dg\text{-}int}$: déterminer graphiquement les abscisses qui ont même image par deux fonctions.
$\theta_{rg\text{-}eq.int}$	Par un changement de cadre, interpréter une équation algébrique à l'aide d'une relation fonctionnelle. Ce changement de cadre nous permet d'affirmer que les solutions de l'équation f(x) = g(x) sont les nombres qui ont la même image par f et g.
$\Theta_{analyse}$	Analyse

Le type de tâches $T_{dg\text{-}int}$ a été présenté ci-dessus.

Pour les organisations mathématiques ponctuelles de $T_{rg\text{-}eq2}$, nous avons explicité les types de tâches qui interviennent dans les techniques. Nous l'avions fait pour mieux rendre compte des techniques attendues dans l'institution secondaires. Mais, ce travail peut être affiné en faisant une étude plus détaillée des organisations mathématiques des types de tâche $T_{dg\text{-}ant}$ et $T_{dg\text{-}int}$ dans le chapitre « fonctions ».

h) Organisation mathématique ponctuelle simple $OMP(T_{rga\text{-}eq2})$

Considérons la tâche t « résoudre l'équation $x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0$ ». Elle relève du type de tâches $T_{ra\text{-}eq2}$ qui en classe de première admet comme technique attendue $\tau_{ra\text{-}eq2.disc}$ (i.e. t relève du sous-type de tâches $T_{ra\text{-}eq.trin}$ en classe de première). Cette tâche t peut être traitée en classe de seconde en combinant deux techniques : résolution graphique pour rechercher une solution puis résolution algébrique après factorisation. Comme nous l'avons vu plus haut (paragraphe II) ce type de tâche est recommandé par les documents d'accompagnement (cf. Figure 12) mais il est peu voir absent des manuels.

L'organisation mathématique simple OMP($T_{rga\text{-}eq2}$) est caractérisée par :

OMP($T_{rga\text{-}eq2}$) = ($T_{rga\text{-}eq2}$, $\tau_{rga\text{-}eq2}$, $\theta_{rga\text{-}eq2}$, Θ)	
$T_{rga\text{-}eq2}$	Résoudre les équations de la forme $P_2(x) = Q_2(x)$ où les polynômes sont choisis de sorte qu'on ne puisse pas factoriser (sans passer par la forme canonique) qui admet une solution facile à déterminer graphiquement (i.e. nombre entier ou rationnel facile à conjecturer).
$\tau_{rga\text{-}eq2}$	$\tau_{ra\text{-}eq2}$ = (T_{dev}, $T_{mvt\text{-}ad}$, T_{red}, $T_{rg\text{-}eq}$, $T_{rt\text{-}eq}$, T_{fact}, $T_{ra\text{-}eq2.pn}$) où : T_{dev} : on développe si nécessaire $T_{mvt\text{-}ad}$: on transpose tous les termes dans un membre pour avoir un second membre nul. Cette étape est absente si $Q_2(x)$ est nul. T_{red} : on réduit $T_{rg\text{-}eq}$: on résout graphiquement l'équation $T_{rt\text{-}eq}$: on teste les solutions graphiques T_{fact} : on factorise connaissant une solution de l'équation $T_{ra\text{-}eq2.pn}$: on résout l'équation produit nul
$\theta_{rga\text{-}eq2}$	$\theta_{eq\text{-}eq}$ pour le type de tâches $T_{mvt\text{-}ad}$ $\theta_{eg\text{-}exp}$: pour les types de tâches T_{dev} et T_{red}. $\theta_{rg\text{-}eq.ant}$ ou $\theta_{rg\text{-}eq.int}$ pour le type de tâches $T_{rg\text{-}eq}$ $\theta_{ra\text{-}eq2.pn}$ pour le type de tâches $T_{ra\text{-}eq2.pn}$
Θ	Analyse et algèbre

Comme pour les autres descriptions nous n'avons pas explicité les technologies relatives au type de tâches T_{fact}. Celui-ci admet son organisation mathématique ponctuelle complexe qui admet plusieurs techniques. Dans notre cas deux techniques de factorisation sont possibles : par identification ou par division euclidienne[22]. Elles sont justifiées en partie par l'élément technologique $\theta_{fact\text{-}rac}$: « si α est une racine du trinôme $P_2(x)=ax^{2+}bx+c$ alors $P_2(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ ».

III.1.5. Synthèse

Nous présentons ci-dessous une synthèse de la description de l'OMP de référence que nous organisons sous forme d'une carte praxéologique de référence. Il s'agit des organisations mathématiques ponctuelles simples ou complexes (cf. Figure 21)[23].

22 Dans l'enseignement actuel seule la technique par identification est enseignée.

23 Cette carte est reproduite en annexe 6 dans un format plus grand

Dans chaque rectangle jaune, on a une organisation mathématique avec une seule technique. Nous n'avons représenté que la praxis pour ne pas alourdir l'arbre. Chaque technique est décrite par une suite de type de tâche. Ainsi, les types de tâches peuvent intervenir dans les techniques d'autres types de tâches qui relèvent du type de tâches visé $T_{r\text{-}eq}$ ou d'autres types de tâches visés comme T_{fact}. Dans cette figure, nous n'avons pas représenté les praxéologies intrinsèques.

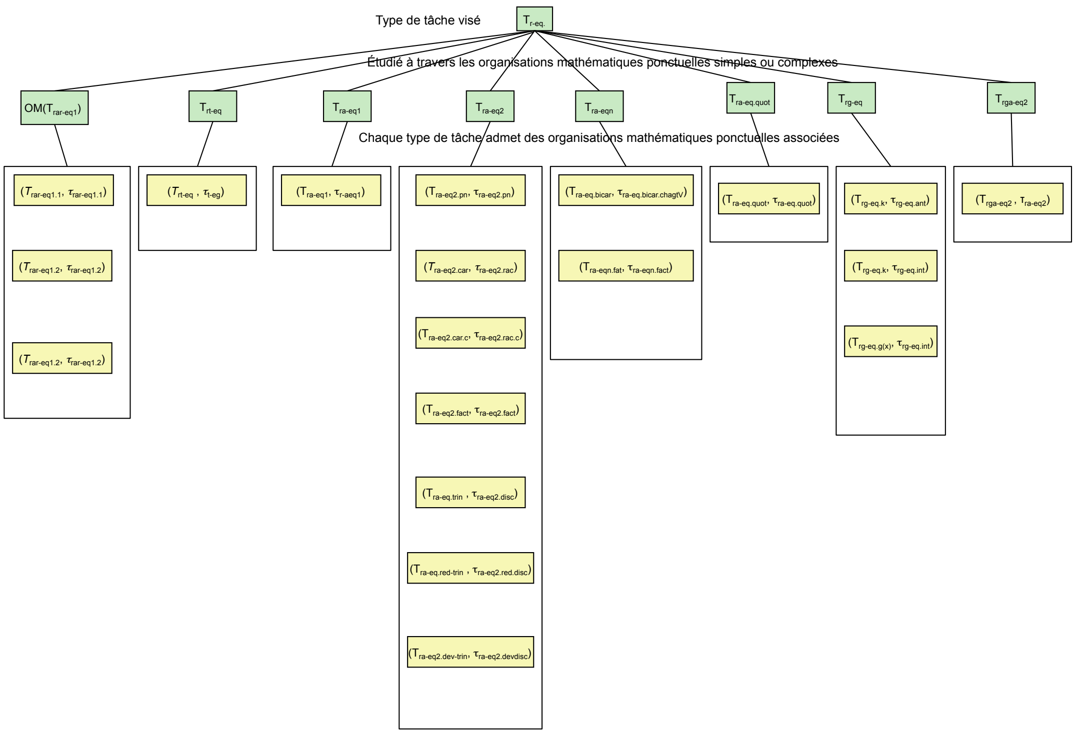


Figure 21 : Carte praxéologique du type de tâches visé $T_{r\text{-}eq}$

A partir de cette carte, on peut en extraire des cartes praxéologiques pour un niveau scolaire donné, construire des organisations mathématiques locales ou régionales, analyser et comparer les praxéologies existantes dans plusieurs manuels…

Comme nous l'avons dit plus haut, au début du paragraphe III.1.4, cette carte praxéologique présente les organisations mathématiques ponctuelles potentielles associées au type de tâches visé $T_{r\text{-}eq}$. Mais, les organisations mathématiques ponctuelles peuvent être différentes entre deux manuels. C'est le cas de $T_{rg\text{-}eq}$ qui admet comme praxéologie ponctuelle complexe de référence $\{OMP_1(T_{rg\text{-}eq}), OMP_2(T_{rg\text{-}eq}), OMP_3(T_{rg\text{-}eq})\}$, mais admet respectivement dans le manuel M_1 et M_2 l'organisation ponctuelle complexe $\{OMP_1(T_{rg\text{-}eq}), OMP_3(T_{rg\text{-}eq})\}$ et $\{OMP_2(T_{rg\text{-}eq}), OMP_3(T_{rg\text{-}eq})\}$.

L'OM de référence est un « modèle de OM » qui permettra d'analyser les reconstructions possibles proposées dans les programmes officiels et dans les manuels sur les équations. Il est donc important de ne pas se limiter à une description des OMP, mais de présenter l'OM de référence avec les différents niveaux de détermination. Dans notre exemple, l'OM de référence englobe et intègre en une OM régionale deux OM locales (que nous désignons par OML_1 et OML_2) et une OM locale (que nous désignons par OML_0).

OML_0 est une organisation autour du calcul numérique et de l'arithmétique qui engendre deux OMP : OMPC($T_{rar\text{-}eq1}$) et OMP($T_{rt\text{-}eq}$). Sa raison d'être est l'introduction de la notion d'équation et plus précisément la mise en place de OMP($T_{ra\text{-}eq1}$) ce qui contribue au passage de l'arithmétique à l'algèbre, passage qui a fait objets de recherche de plusieurs travaux ((Vergnaud, 1991),(Vergnaud, 1988), (Chevallard, 1989), (Chevallard, 1985), (Chevallard, 1990), (Gascon, 1994)). OML_0 disparaît en laissant place à OML_1.

OML_1 est une organisation autour du calcul algébrique qui engendre quatre OMP : OMP($T_{ra\text{-}eq1}$), OMPC($T_{ra\text{-}eq2}$), OMPC($T_{ra\text{-}eq.n}$) et OMP($T_{ra\text{-}eq.quot}$).

OML_2 est une organisation autour des fonctions qui engendre une OMPC : OMPC($T_{rg\text{-}eq}$). Nous pouvons considérer une OM locale à partir d'au moins deux OMP simples ou à partir d'une seule OMP complexe car celle-ci est, par définition, constituée d'au moins de deux OMP simples.

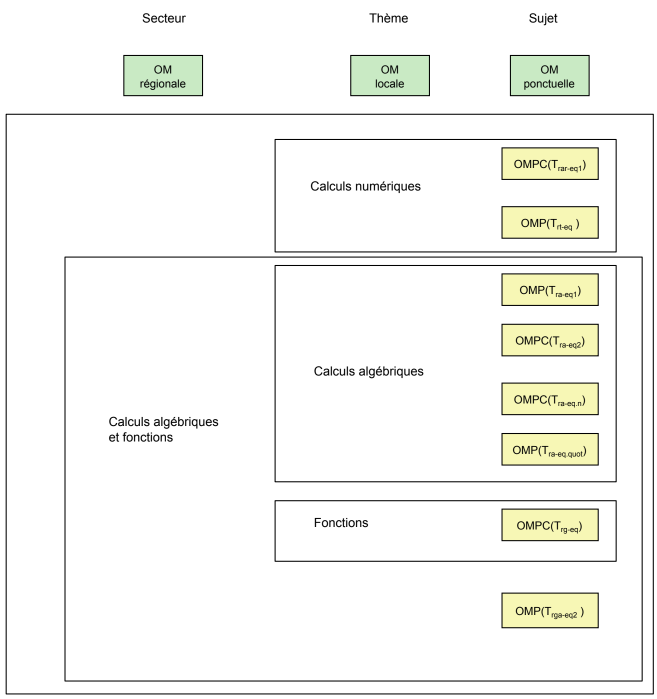


Figure 22 : l'OM de référence pour le type de tâches visé « résoudre une équation »

L'OM régionale fournit un environnement favorable pour des tâches qui articulent OML_1 et OML_2.

IV. DESCRIPTION D'UN MODELE POUR DECRIRE DES PRAXEOLOGIES PONCTUELLES

Dans ce paragraphe nous présentons une synthèse de notre modèle pour décrie les praxéologies ponctuelles dans une institution (IV.1) puis nous élargissons ce modèle aux praxéologies ponctuelles des élèves (IV.2).

IV.1. Description des praxéologies ponctuelles d'une institution

Soit I une institution d'enseignement, qui peut être une classe ou un cursus comme « collège » ou plus large comme « enseignement secondaire ».

Soit T un type de tâche dans I. Par l'analyse des programmes et des manuels, on peut caractériser l'OM à enseigner. En fait, comme on l'a montré dans l'étude de cas (du paragraphe II), il y a des différences entre les manuels sur les OM à enseigner et les praxéologies sont souvent incomplètes. Pour cela, le chercheur construit, sous le contrôle du savoir savant, une OM de référence qui a pour objectif :

- de rendre compte de la variété des OM à enseigner dans les manuels
- de proposer des OM à enseigner pouvant exister dans I
- de reconstruire des éléments manquants dans les OM à enseigner comme les technologies.

Si le type de tâches T admet une unique technique dans I, on lui associe l'*organisation mathématique ponctuelle simple* définie par OMP(T) = $(T, \tau, \theta, \Theta)$. Sinon, on lui associe une *organisation mathématique ponctuelle complexe* définie par OMPC(T) = $[(OMP_k(T))_k, \theta^T]$ où :

- $OMP_k(T) = (T_k, \tau_k, \theta_k, \Theta_k)$ dans le cas où on peut caractériser la portée institutionnelle $P_I(\tau/T)$ de la technique τ_k dans I. T_k est alors un sous-type de tâche de T.
- $OMP_k(T) = (T, \tau_k, \theta_k, \Theta_k)$ sinon.
- θ^T est la technologie associée à *T* qui intègre les technologies θ_k dans un ensemble plus large situant les techniques les unes par rapport aux autres, cernant leurs domaines respectifs d'efficacité.

Soulignons que ce découpage est relatif à une institution et qu'il est possible de prendre en compte la dimension temporelle des OM au sein de chaque institution (cf. paragraphe II). En particulier, un type de tâches T peut avoir une organisation mathématique simple dans une institution I et une organisation mathématique complexe dans une autre institution I'.

Nous avons distingué deux catégories de types de tâches. D'une part, les types de tâches qui n'existent qu'à travers la mise en œuvre de techniques de certains types de tâches qu'on appelle type de tâches *intrinsèque*. D'autre part, les types de tâches qui peuvent être prescrites aux élèves qu'on appelle type de tâches *extrinsèque*.

Pour la description des techniques nous avons distingué le niveau *générique* quand on se place au niveau de type de tâches et le niveau *instancié* quand on se place au niveau de tâches.

Au niveau générique 0, τ est décrite par une suite de type de tâche $(T_i)_i$. Si le type de tâche T intervient dans la description on peut le spécifier à l'aide de sous-type de tâches lorsque cela est possible.

Au niveau instancié 0, la technique est décrite par une suite de tâches $(t_i)_i$ qui sont des instanciations des types de tâche $(T_i)_i$ du niveau générique.

La mise en œuvre de chaque T_i (respectivement t_i) au niveau générique (respectivement instancié) repose sur la mobilisation d'une technique. On obtient ainsi des praxis pour décrire la technique au niveau générique 1 (respectivement instancié 1). Cela revient au même de décrire la technique par une suite d'organisations ponctuelles simples. On se contentera aux praxis pour décrire une technique car c'est la partie qui est visible dans la mise en œuvre de la technique.

A chaque T_i (de la description générique de la technique τ) est associé soit une OM simple soit OM complexe. Dans ce dernier cas, plusieurs techniques peuvent être mobilisées dans la mise en œuvre de T_i dans la technique τ. Dans le cas où tous les T_i ont une OM simple alors la technique τ est décrite au niveau générique 1 par $((T_i,\tau_i))_i$. Sinon, on associe à τ plusieurs descriptions à partir des différentes praxis.

En revanche, au niveau instancié 1, on peut identifier les organisations ponctuelles qu'on peut mobiliser (dans le cas de l'analyse a priori) ou mobilisée (dans le cas de l'analyse d'une production) pour chaque T_i. On peut donc décrire la technique par une succession de praxis. Chaque technique τ_i peut être décrite à son tour à l'aide des praxis jusqu'à un niveau qu'on considère comme élémentaire c'est-à-dire des praxis élémentaires. Les praxis intrinsèques sont considérées comme élémentaires.

Les types de tâches extrinsèques qui interviennent dans la description de la technique τ de T peuvent être des sous-types de tâches de T ou d'autres type de tâches visés. Pour ces derniers il n'est pas nécessaire de les spécifier en sous-type de tâches.

Le niveau 1 nous semble pertinent pour l'analyse didactique des liens entre les OM. En effet, il permet de préciser le niveau d'intervention d'une OM dans une tâche au sens de (Castela, 2008). Chaque praxis (T_i,τ_i) ou (t_i,τ_i) intervenant dans la description de la technique τ correspond à une organisation mathématique ponctuelle.

IV.2. Description des praxéologies ponctuelles d'un élève

Nous proposons d'élargir le modèle précédent pour décrire les connaissances des élèves par des praxéologies. Ce modèle de praxéologie a l'originalité d'interpréter et de décrire les connaissances de l'élève par le même modèle que celui qu'on utilise pour décrire les attentes et les pratiques institutionnelles.

Nous avons présenté dans le paragraphe précédent les principes qui guident la description des praxéologies d'une organisation mathématique de référence. Le découpage en type de tâches et en sous-type de tâches n'et pas suffisant pour décrire les praxéologies d'un élève. En effet, pour une tâche donnée, relevant d'un type de tâche institutionnel, les élèves peuvent mettre en œuvre des techniques non attendues par I valides ou non mathématiquement. Nous proposons d'inscrire ces techniques dans des praxéologies qui sont à construire par le chercheur.

IV.2.1. Statut de l'erreur dans ce modèle

Dans sa thèse Nguyen (Nguyen, 2006) a rattaché l'analyse de l'erreur à des praxéologies en mettant en évidence les phénomènes suivants :

- L'utilisation d'une technique scientifiquement valide peut conduire à des erreurs.

- Certaines erreurs peuvent être dues à une non-maîtrise de techniques indispensables à la résolution de certaines tâches rencontrées lors de la mise en œuvre d'une technique valide.

- Les erreurs peuvent aussi provenir de l'utilisation de techniques valides sur un champ plus restreint, étendues "abusivement", ou de la mise en œuvre d'une technique scientifiquement valide, mais non adéquate institutionnellement.

Cette catégorisation a été faite pour hiérarchiser les erreurs en relation avec la non-maîtrise de la technique. Ainsi, la première catégorie regroupe les erreurs considérées comme moins importantes pour la maîtrise de la technique. Par exemple les erreurs de calculs numériques qui interviennent dans une technique de résolution des équations du second degré relèvent de la première catégorie et sont considérées moins importantes que les erreurs relatives à la factorisation qui est une étape importante de la technique de résolution des équations du second degré.

Nous réinterprétons cette catégorisation hiérarchisée des erreurs dans notre modèle en situant les erreurs dans les différents niveaux de description de la technique. Ainsi, les erreurs de la première (respectivement de la deuxième et troisième) catégorie correspondent aux erreurs du niveau supérieur ou égal à 3 (respectivement de niveau 2 et niveau 1).

Dans l'étude de Nguyen (Nguyen, 2006) l'erreur est considérée comme un dysfonctionnement d'une technique institutionnelle. A la suite de cette thèse, nous avons cherché à interpréter l'erreur comme élément constituant d'une technique personnelle de l'élève (Croset & Chaachoua, 2010). Celle-ci peut être valide ou non mathématiquement, conforme ou non aux attentes institutionnelles. Ce point de vue a été développé dans le travail de thèse de Croset (Croset M. , 2009) en introduisant la notion de praxéologie en acte que nous présentons dans le paragraphe suivant.

IV.2.2. Praxéologie personnelle

Dans sa thèse Croset (Croset, 2009, p.177) a définit la notion de praxéologie-en-acte comme suit :

> **Définition.** Nous appelons *praxéologie-en-acte*, le modèle triptyque, d'organisation praxéologique, de l'activité d'un sujet institutionnel constitué des trois composantes :
>
> - Un type de tâche-en-acte qui est un objet [1] que connaît ou *reconnaît* le sujet, dans le sens où le sujet a un rapport à cet objet [Chevallard, 1992, p87]. Le type de tâche-en-acte est l'ensemble des situations que le sujet perçoit comme similaires, provoquant chez lui l'application d'une même technique. Deux types de tâche-en-acte se distinguent par l'induction possible de deux techniques différentes par le sujet modélisé. Le découpage en types de tâche-en-acte ne correspond pas nécessairement à celui de l'institution.
> - Une technique-en-acte utilisée par l'élève pour résoudre le type de tâche-en-acte. Elle peut être erronée, correcte, légitimée par l'institution de référence ou non. Elle doit présenter une certaine stabilité dans son utilisation pour être considérée comme technique de résolution. La technique n'acquière sa légitimité chez l'élève que si elle est régulièrement utilisée. Nous évitons ainsi de considérer comme une technique-en-acte, des erreurs d'étourderie ou de dérapage ponctuel.
> - Une technologie-en-acte qui, explicite ou non, gouverne et légitime l'utilisation de la technique-en-acte.
>
> 1. « un objet existe s'il est connu d'au moins une personne ou une institution (il pourra d'ailleurs n'exister -cas limite- que pour cette personne ou pour cette institution). » [Chevallard, 1992, p87].

Cette définition est une extension de la notion de praxéologie comme modélisation de pratiques institutionnelles à la modélisation des pratiques d'un élève en tant que sujet d'une institution.

Nous reprenons cette définition, mais nous préférons utiliser le terme de *praxéologie personnelle* à la place de *praxéologie-en-acte* par analogie à la notion du rapport personnel.

Ainsi, le rapport institutionnel $R_I(e,O)$ du sujet en position élève à l'objet O au sein d'une institition I est décrit par les praxéologies institutionnelles. Et le rapport personnel $R_p(e^*/I,O)$ d'un élève e*, assujetti à une institution I, à l'objet O est décrit par des praxéologies personnelles.

Nous rejoignons l'hypothèse de recherche validée dans (Croset M. , 2009) selon laquelle le découpage en type de tâches institutionnels ne correspond pas toujours à celui de l'élève.

La détermination des types de tâches personnelles est liée à la détermination des techniques personnelles. En effet des tâches sont considérées comme du même type de tâches personnelles pour un élève si celui-ci mobilise une même technique personnelle pour les accomplir.

Soit t une tâche prescrite à un élève au sein d'une institution I. Cette tâche relève d'un type de tâches institutionnel T_i ou éventuellement un sous-type de tâches de T_i. Il existe donc une technique institutionnelle τ_i pour accomplir t. On a donc une organisation mathématique ponctuelle, simple ou complexe, relative au type de tâches T_i et qui relève d'une organisation mathématique locale OML_i et éventuellement d'une organisation régionale.

Soit τ_e la technique mobilisée par l'élève pour accomplir la tâche t. Même si τ_e est la même que la technique attendue τ_i, on ne peut pas conclure que le type de tâches de l'élève est le même que le type de tâches institutionnel T_i. En effet, il se peut que pour d'autres tâches qui relèvent du même type de tâche institutionnel T_i, l'élève mobilise une autre technique différente de τ_i.

Nous cherchons la stabilité de la mobilisation de la technique pour les tâches qui relèvent de T_i et éventuellement d'autres types de tâches qui sont proches de T_i et donc qui relèvent de l'organisation mathématique locale OML_i. L'ensemble de ces tâches constitue le type de tâches personnel de l'élève et on a ainsi une praxis personnelle $[T_e/\tau_e]$. Ce diagnostic peut se faire à partir des réponses de l'élève à un ensemble de tâches qui lui sont proposés. La qualité du diagnostic des praxis personnelles dépend de la variété des tâches proposées.

A ce niveau nous obtenons des praxéologies ponctuelles de l'élève. La détermination des technologies de l'élève peut se faire en regroupant ces praxéologies ponctuelles autour d'une organisation locale de l'élève. Cette caractérisation des technologies de l'élève à partir du regroupement des praxéologies ponctuelles doit être appuyée et validée par une méthodologie spécifique comme des interviews des élèves. Voir à ce propos le travail de thèse de Croset (Croset M. , 2009).

Pour décrire les techniques de l'élève nous reprenons le même modèle utilisé pour décrire les techniques institutionnelles (cf. paragraphe IV.1).

C – LA MODELISATION DES CONNAISSANCES DES ELEVES DANS UN EIAH

Dans cette partie nous montrerons comment le modèle praxéologique décrit ci-dessus peut être utilisé en EIAH pour diagnostiquer les connaissances des élèves à partir des traces recueillis dans l'EIAH.

Dès les années 70, la modélisation des connaissances de l'élève a pris une place et devenue une composante majeure des travaux de la communauté EIAH et qui a donné lieu à des recherches en intelligence artificielle. Nous ne ferons pas une synthèse de ces travaux sur la modélisation de l'apprenant dans la problématique EIAH, mais nous renvoyons le lecteur au chapitre 2 de la thèse de Croset (Croset M. , 2009) qui fait un état de l'art assez complet en la matière. Nous nous appuyons sur ce chapitre pour préciser ce que nous entendons par le modèle de l'apprenant que nous présentons ci-dessous.

Trois modules sont distingués dans un logiciel éducatif : module du domaine, module pédagogique et module de l'apprenant (Self, 1999). Le module de l'apprenant est constitué de trois composantes : des données d'entrée, un diagnostic et des sorties.

Les données d'entrée représentent la trace qui est « une suite d'observables temporellement située, éventuellement re-jouable. » (Mille, 2007).

La fonction diagnostic traite les données d'entrée. Le diagnostic est défini par Wenger (Wenger, 1987) comme suit: « The word diagnosis has been used to refer to pedagogical activities aiming at collecting and inferring information about the student or his actions »[24]. L'auteur distingue trois niveaux, qui ne sont représentatifs ni de la difficulté ni de la qualité du diagnostic.

- Le niveau comportemental est une réorganisation du réel observé : il permet de reproduire les comportements de l'élève. Il est obtenu à partir de l'ensemble des événements en ignorant ceux qui sont non pertinents et en remplaçant certaines séquences d'événements par des « descripteurs de plus haut niveau déterminé par le langage de commande du système » (Balacheff, 1994).

- Le niveau épistémique cherche à interpréter et relier les observables en terme de stratégies ou de connaissances. Il prend en compte les connaissances du domaine modélisé.

- Le niveau individuel gère des informations d'un troisième ordre tel que les attitudes ou les émotions de l'apprenant lors de l'apprentissage.

Les sorties sont les informations diagnostiquées qui peuvent être accessibles ou non aux agents humains autres que les concepteurs.

Ces notions permettent de définir **le modèle de l'apprenant** : « nous appelons modèle de l'apprenant ce que le système « sait », par reconstruction à un moment donné, de l'apprenant » (Croset, 2009, p.59). Il constitue donc la sortie du module de l'apprenant. Or, la qualité de la sortie est étroitement liée à la qualité des données d'entrée et du diagnostic. C'est

24 « Le terme diagnostic a été utilisé en référence aux activités pédagogiques ayant comme but de rassembler et d'inférer de l'information au sujet de l'élève ou de ses actions »

à cette qualité que nous nous sommes attaché en menant un travail de collaboration entre chercheurs en informatique et en didactique des mathématiques autour du projet Aplusix.

Nous présentons le logiciel Aplusix (paragraphe I) qui a constitué un milieu écologique pour le recueil de données à partir des résolutions de problèmes d'algèbre par les élèves. Ensuite, nous étudierons la nature des traces obtenues à partir de ces données (paragraphe II). Ces traces seront réorganisés pour obtenir une modélisation comportementale de l'apprenant puis enrichies par des fonctions de diagnostic au niveau local (paragraphes II.3 et III) et au niveau global (paragraphe V).

La mise en œuvre de cette modélisation informatique a été faite dans un premier temps sur la résolution algébrique des équations de degré 1 en utilisant un modèle didactique basé sur la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1991). Cette étude de cas est présentée dans le paragraphe IV.

Enfin, dans le paragraphe V, nous mettrons en œuvre notre modèle praxéologique pour la modélisation des connaissances des élèves dans EIAH, avec un exemple d'illustration.

I. PRESENTATION DU LOGICIEL APLUSIX

L'environnement Aplusix (Nicaud, Bouhineau, & Chaachoua, 2004) est un EIAH pour pratiquer l'algèbre élémentaire, les transformations d'expressions algébriques, les résolutions d'équations, d'inéquations et de systèmes d'équations, ou encore les résolutions de problèmes par la mise en équation, au lycée et au collège. Il est composé, principalement :

- d'un micromonde d'édition des expressions algébriques, éditeur riche et souple, offrant diverses rétroactions syntaxiques et sémantiques,

- d'un module de génération automatique d'exercices comportant plusieurs centaines de patrons d'exercices,

- de modules pour l'enseignant (éditeur d'exercices et de problèmes, administration des comptes).

L'objectif de l'élève dans Aplusix consiste à résoudre, comme sur le papier, des exercices d'algèbre en produisant, ligne de calcul après ligne de calcul, les différents pas de calcul de son raisonnement algébrique. Le cadre mathématique offert pour ce travail est la résolution par équivalence : l'élève doit, à chaque étape, donner une expression algébrique équivalente à l'expression précédente ; il a toute liberté, comme sur le papier, pour le choix de l'expression algébrique de chaque étape et de la forme de son raisonnement (linéaire ou avec des retours en arrière). Lorsque les activités se déroulent en mode *entraînement*, des rétroactions sont fournies, en particulier deux rétroactions fondamentales. Tout d'abord, l'équivalence algébrique entre étapes est calculée en permanence et affichée de manière non intrusive. Ensuite, quand l'élève décide que l'exercice est terminé, une vérification syntaxique et didactique de la forme de l'expression solution de l'élève est effectuée et les résultats de cette analyse sont affichés. Il existe aussi un mode *test* où ces rétroactions sont absentes pendant les calculs de l'élève et reportée à un temps ultérieur d'autocorrection.

Au cours de la conception d'Aplusix, les auteurs se sont efforcés de proposer une représentation des expressions algébriques utilisées à l'écran aussi fidèle que possible à la représentation usuelle de ces expressions, telle que chacun peut la donner sur le papier ou au tableau (cf. Figure 23).

Le logiciel Aplusix propose des commandes telles que *calculer* (effectuer un calcul numérique), *réduire*, *développer* qui permettent à l'élève de sous-traiter des tâches à l'ordinateur, à l'instar des logiciels de calcul formel, avec des fonctionnalités plus limitées. Ces commandes permettent au logiciel de prendre en charge des tâches algébriques. Elles permettent ainsi, notamment, de développer, réduire ou ordonner des expressions en fournissant directement le résultat du calcul.

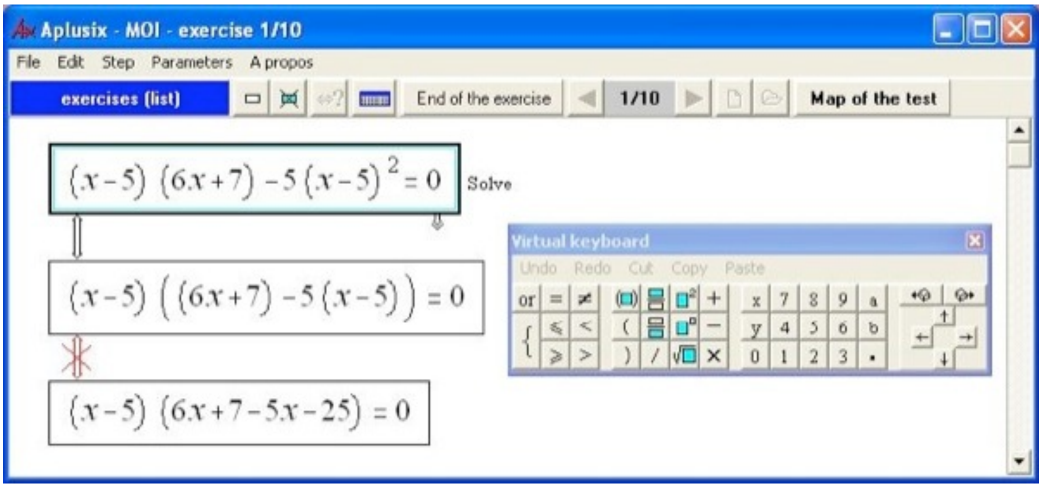


Figure 23. *Résolution d'un exercice par un élève.*

II. NATURE DES TRACES

Dans la problématique de la modélisation des connaissances de l'apprenant le travail du chercheur commence par le recueil de données expérimentales issues d'un milieu écologique d'apprentissage, ayant la forme de productions écrites ou orales d'élèves, données que nous appelons traces ou traces brutes (Chaachoua, Croset, Bouhineau, Bittar, & Nicaud, 2007). Ce recueil peut se faire automatiquement lorsque le logiciel utilisé dispose de fonctionnalités élémentaires d'enregistrement de journaux d'activités (fichiers « log »), ce qui est le cas du logiciel Aplusix. Le découpage et la réorganisation des traces brutes obtenues à l'étape précédente peuvent se faire automatiquement dans Aplusix grâce à un algorithme de diagnostic local. Le résultat de cette étape, réorganisé linéairement en fonction du temps, peut être vu comme une trace enrichie de l'activité de l'élève. C'est à l'issue de ces étapes qu'on peut produire une modélisation des connaissances des élèves. La qualité didactique de cette modélisation est étroitement liée à la qualité de la trace enrichie. En fait, la trace est enrichie en fonction du modèle utilisé pour la modélisation des connaissances.

II.1. Trace brute dans Aplusix

Dans l'EIAH Aplusix, la trace brute est obtenue par enregistrement des événements logiciels provoqués par un élève dans son travail de résolution de problèmes ou d'exploration d'expressions dans le micromonde d'édition d'expressions algébriques. L'ensemble de ces événements logiciels est conservé sous la forme d'une liste de n-uplets. Chaque n-uplet comporte principalement un marqueur temporel, une information symbolique sur l'action réalisée et l'état du document (expression algébrique de l'étape courante) accompagné du contexte d'édition obtenu à la fin de son exécution (position du curseur d'édition, présence de sélection). C'est une forme classique Temps-Transition-État de relevé de traces des systèmes de collecte de traces.

La trace brute ainsi obtenue comporte toutes les expressions algébriques produites par l'élève (l'un des items du n-uplet précédent) et le film des actions réalisées par cet élève (suite de ces n-uplets). Elle comporte les essais fructueux, ceux qui apparaîtront dans la solution finale, et les essais infructueux, qui seront effacés après avoir été visualisés, explorés puis abandonnés. Ces informations sont riches pour le didacticien car elles relèvent de la composante privée du travail de l'élève (Coppé, 1998). Cependant, cette trace comporte aussi beaucoup d'informations qui ne ressortent pas du travail mathématique ou du travail au niveau stratégique de résolution d'un problème algébrique. En effet, elle cherche à conserver fidèlement l'activité de l'élève et comporte aussi, en conséquence, toutes les informations liées à l'activité primaire d'édition de l'élève. Entre autres, parmi ces informations d'éditions, certaines sont sans effet sur l'état, restreint aux aspects mathématiques, de l'environnement (ex : modification de la position de la souris ou d'une sélection). Enfin, aussi riche que cette trace brute puisse sembler, elle ne vise pas à être exhaustive et ne l'est pas. Certaines informations sont délibérément perdues. Pour exemple, les mouvements de souris, lorsqu'ils ne sont pas associés à des clics, ne sont pas enregistrés.

II.2. Travail de segmentation des traces brutes

Un premier travail de segmentation de la trace est opéré pour ne conserver que des éléments significatifs de la trace brute. Des critères sont utilisés, permettant de filtrer l'ensemble des états intermédiaires d'éditions. Ces critères reposent sur certains événements logiciels considérés comme des indicateurs de validation par l'élève d'un état intermédiaire, cohérent de son travail : introduction, ou suppression, d'une étape algébrique dans le raisonnement de l'élève (équivalent de l'écriture d'une nouvelle ligne de calcul), demande de validation du travail, passage à l'exercice suivant.

En suivant les modèles d'analyses de la motivation et de la concentration des élèves (De Vicente & Pain, 1998), d'autres critères auraient été possibles, mais nous considérons que la segmentation grossière définie précédemment fournit des traces déjà suffisamment riches et possède une garantie de ne pas comporter d'informations non pertinentes.

À l'issue du travail de segmentation des traces brutes, les expressions algébriques significatives de l'élève obtenues sont associées par deux pour former des *pas de calcul* : à chaque expression significative est associée l'expression significative qui lui précède (dans le raisonnement algébrique de l'élève). Un pas de calcul d'élève comporte donc une étape initiale et une étape finale. Nous reprenons la terminologie et les définitions données dans (Croset, 2009, p.83) :

« Un *pas de calcul* est la transformation qu'effectue l'élève explicitement (publiquement) d'une expression en une autre […]. Si l'élève efface une partie de l'expression et réécrit une autre expression, c'est l'expression définitive ou validée qui est prise en considération.

L'*expression mère* d'un pas de calcul est l'expression initiale d'un pas de calcul. Elle n'est pas nécessairement l'expression donnée dans l'énoncé de l'exercice.

L'*expression finale* est l'expression produite par l'élève lors d'un pas de calcul. L'expression finale n'est pas nécessairement la dernière expression de l'exercice. »

Dans l'exemple ci-dessous (Figure 24) le raisonnement de l'élève est composé de 3 « pas de calcul de l'élève ».

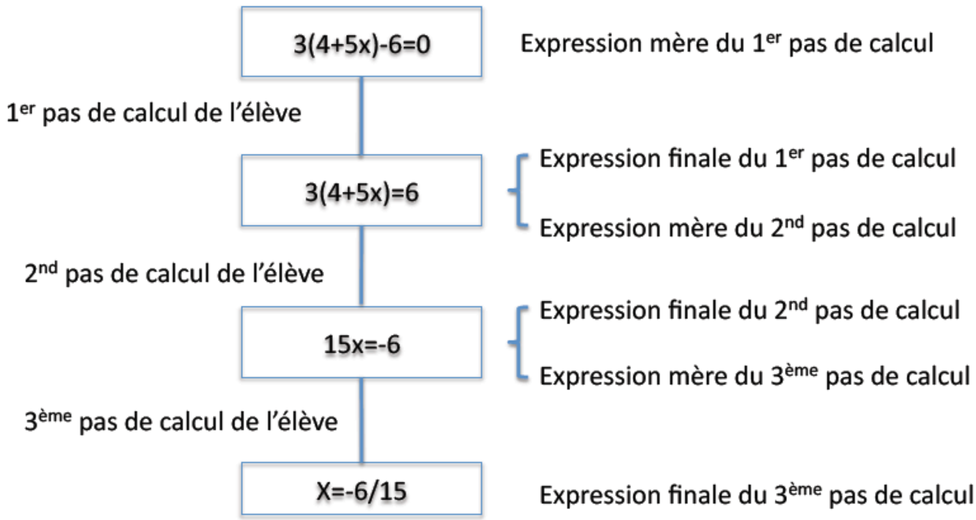


Figure 24 : Exemple de décomposition d'un raisonnement d'un élève en succession de pas de calculs et statuts des expressions.

Le mode d'édition libre permis par Aplusix ne permet pas de définir objectivement quelle opération (au sens large) a été utilisée par l'élève pour passer de l'une à l'autre. C'est d'autant plus vrai quand l'élève a fait des erreurs en appliquant une transformation algébrique correcte, ou s'il a appliquée une transformation algébrique incorrecte ; en faisant l'hypothèse qu'il a travaillé ainsi.

Ce travail de segmentation s'effectue en vue des traitements automatiques complexes ultérieurs : analyses statistiques, diagnostic local du travail des élèves ou élaboration d'un modèle de l'élève. La visualisation au magnétoscope par les didacticiens des travaux d'un élève est exempte de ces segmentations. Les analyses statistiques reposent sur un filtrage plus fort ne conservant que l'état final du travail de l'élève.

II.3. Nature des traces enrichies

A partir de la segmentation précédente, une trace dérivée, importante dans notre système, est obtenue que nous appelons la trace enrichie ou trace complétée. Elle comporte, à la base, les pas de calcul d'élèves issus de la segmentation. Elle est enrichie d'un diagnostic constitué d'une proposition de règles de transformation expliquant le passage de l'expression initiale du pas de calcul à l'expression finale du même pas. Un algorithme utilisant une bibliothèque de règles correctes et incorrectes, mettant en œuvre une recherche heuristique, est utilisé pour effectuer ce diagnostic. Il s'agit d'un diagnostic local qui consiste à associer à un pas d'élève une suite de règles. Un travail fondamental de notre recherche réside dans la construction de cette bibliothèque de règles.

(Croset, 2009, p.83) propose la définition suivante pour le diagnostic :

« Un *diagnostic* d'un pas de calcul est une suite d'applications de règles d'une bibliothèque de règles permettant de passer de l'expression mère à l'expression finale du pas de calcul. Pour un même pas de calcul, plusieurs diagnostics sont possibles. Si aucun diagnostic n'est trouvé (que ce soit de manière informatique ou manuelle), on dira que le processus de diagnostics est en échec. »

III. MODELISATION LOCALE

Nous présentons dans ce paragraphe la modélisation locale pour le diagnostic permettant l'obtention d'une trace enrichie. La modélisation consiste à découper chaque pas de calcul d'élève en une suite de pas de calculs élémentaires et d'associer une règle algébrique à chaque pas de calcul élémentaire. Un pas de calcul d'élève peut ainsi être interprété comme la succession d'applications de règles algébriques, cf. Figure 25.

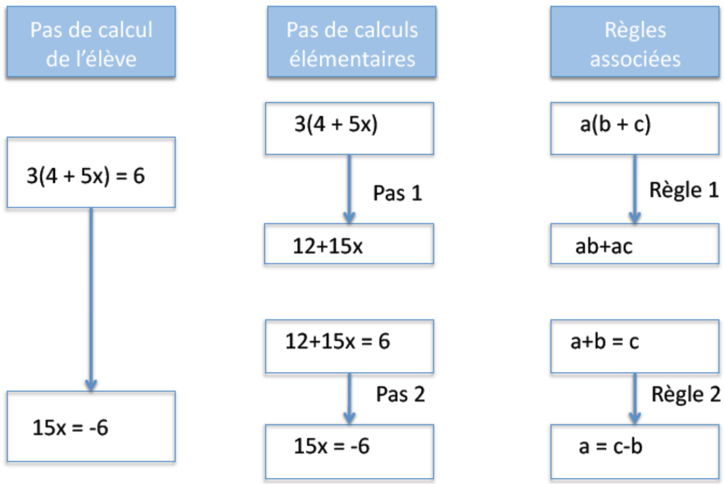


Figure 25 : Exemple d'association d'une séquence de règles à un pas de calcul. Ce pas de calcul est extrait du raisonnement donné dans l'exemple (Figure 24)

Dans cet exemple, le pas de calcul de l'élève est obtenu à partir de la segmentation de la trace brute. Rappelons que la trace brute peut contenir d'autres informations comme des transformations qui ont été supprimées par l 'élève au sein d'une étape. A partir de ce pas de calcul de l'élève, on associe deux pas de calcul élémentaires et à chaque une règle expliquant la le calcul élémentaire. Ainsi, le diagnostic local permet d'associer au pas de calcul d'élève les deux règles. La trace enrichie est constituée du pas de calcul de l'élève et des deux règles obtenues par le diagnostic local.

III.1. Méthodologie

Pour obtenir la trace enrichie on a besoin de construire une bibliothèque de règles et un processus de diagnostic local.

Cette approche, par construction de bibliothèques de règles, est classique, on la retrouve chez (Wenger, 1987). Notons, cependant, que ce travail n'est pas nécessaire dans certains EIAH où il est demandé à l'élève de préciser (à l'aide d'un menu) la règle qu'il souhaite appliquer. Ainsi en est-il des environnements MathXpert (Beeson, 1998) ou T-algebra (Prank, Issakova, Lepp, & Vaiksaar, 2006). Dans les deux environnements, les règles proposées à l'élève dépendent de l'expression qu'il souhaite transformer. Le degré d'initiative de l'élève dans ces environnements est limité et l'opportunité d'apparition de certaines erreurs est nettement restreinte. Les informations recueillies dans l'environnement Aplusix sont plus proches du chemin de pensée de l'élève, puisque ce dernier est libre d'écrire l'expression qu'il souhaite mais, en contrepartie, la modélisation de l'élève est plus complexe.

La détermination de la bibliothèque des règles s'appuie de façon complémentaire sur les travaux de recherches en didactique et sur des expérimentations selon la méthodologie suivante.

Phase 1 :

Construction d'expérimentations pour recueillir une quantité importante de protocoles sous la forme de traces brutes. Ces expérimentations ont été réalisées dans le cadre du projet de recherche « Cognitique » (Nicaud & al., 2005) et aussi dans le cadre des mémoires de master et des thèses que nous avons encadrées.

Phase 2 :

Etude en différé des traces brutes avec le magnétoscope pour déterminer *à la main* des règles, correctes ou erronées, qui sont appliquées par les élèves afin d'élaborer une bibliothèque de règles algébriques. Ces règles seront considérées dans notre modèle praxéologique comme des techniques élémentaires. Il faut donc chercher un bon niveau de granularité qui prend en compte les aspects didactiques, liés à notre modèle, et des aspects informatiques, liés à l'algorithme de diagnostic local.

Phase 3 :

Construction, automatisation et réglage fin d'un processus de diagnostic local associant à chaque pas de calcul d'un élève l'application d'une suite de règles algébriques de la bibliothèque.

Notons que les trois phases décrites ci-dessus ne se mettent pas en place de façon linéaire mais en spirale pour obtenir une liste de règles stables dont le diagnostic automatique soit satisfaisant. La méthodologie générale peut être résumée par la représentation schématique ci-dessous, extraite de (Croset, 2009, p. 88).

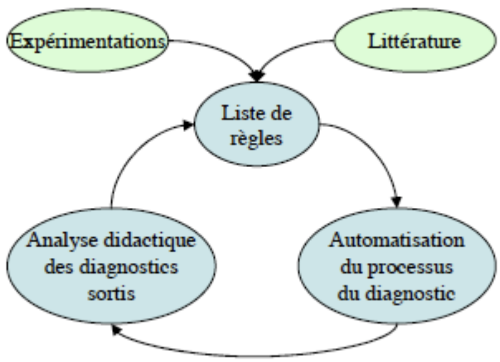


Figure 26 : Méthodologie pour la modélisation locale.

III.2. Élaboration de la bibliothèque de règles algébriques

Les règles algébriques sont des modélisations des observables (transformations effectuée par l'élève) ; elles sont des interprétations des comportements locaux. Une bibliothèque de règles correctes a été mise en œuvre très tôt dans Aplusix (dans une version non encore distribuée) pour effectuer des résolutions et faire des suggestions. Les règles erronées constituent une extension de cette bibliothèque.

Processus d'élaboration de la bibliothèque de règles erronées

La bibliothèque de règles erronées s'est construite en trois étapes :

- détection manuelle de règles détaillées erronées via le magnétoscope,
- regroupement des règles détaillées en règles abstraites,
- validation des choix précédents et suppression de certaines règles détaillées. Cette étape s'effectue par comparaison des diagnostics obtenus en prenant différentes bibliothèques de règles, la trace brute servant de données de référence.

Il y a, dans ce travail, une recherche de compromis entre richesse des traces, choix didactiques et contraintes informatiques.

L'identification des règles détaillées s'est faite manuellement. Elle repose sur des connaissances algébriques des didacticiens de notre équipe et sur l'étude fine des traces à l'aide du magnétoscope d'Aplusix. Le magnétoscope est, dans ce travail, essentiel. En particulier, il permet d'avoir accès à la sphère privée de l'élève, plus que ne le permettent les protocoles ou même le cadre papier/crayon : ce que l'élève accepte comme étape intermédiaire, visible aussi dans les traces enrichies, mais surtout ce qu'il efface, sont autant d'éléments précieux et apportent des précisions considérables quant aux modélisations des transformations. Quelques interviews d'élèves ont aussi permis de valider ou de préciser nos hypothèses d'interprétation. Par exemple, le pas de calcul de factorisation $(7 + x)(x + 1) + (x + 1) \rightarrow (x + 1)(7 + x)$ a été expliqué par son auteur de la manière suivante : le deuxième facteur est complété par « ce qui reste dans chaque terme, en enlevant le facteur commun » ; dans le premier terme, « il reste $(7+x)$ », dans le second, « rien ». Cette interview a validé la règle de factorisation que l'on avait choisie d'associer à cette transformation : $ab + a \rightarrow a(b)$.

Des règles détaillées ont ensuite été regroupées en règles abstraites, selon le genre de tâches. Deux objectifs principaux organisaient ce travail : minimiser le nombre d'objets à traiter dans le processus automatique et faire ressortir des aspects cognitifs dans l'utilisation conjointe des règles. Par exemple, il est cognitivement intéressant de regrouper l'erreur consistant à appliquer la règle $a+(b+c) \rightarrow a+b+a+c$ de la règle correcte de développement d'un produit $a(b+c) \rightarrow ab+ac$. Ces deux règles détaillées donnent la règle abstraite $a\square(b+c) \rightarrow a\square b+a\square c$ où $\square$ peut valoir + ou ×, règle qui, elle-même, pourrait être encore généralisée. Un exemple plus détaillé du travail d'abstraction est expliqué ci-après pour le cas de la résolution des équations de degré 1 (paragraphe IV). Ce sont, cependant, les règles détaillées qui sont associées aux pas de calcul d'un élève.

De manière conjointe, nous automatisons le processus de diagnostic qui permet de déceler le nombre d'applications d'une règle détaillée et d'en démontrer la pertinence. Après avoir listé, généralisé et codé un premier ensemble de règles à partir de centaines de transformations, le processus automatique est lancé sur un nombre conséquent de transformations (de l'ordre du millier). Le diagnostic automatique permet de préciser le nombre d'occurrences de chaque règle. Étant donné que les règles n'ont d'intérêt que si on les observe chez un certain nombre d'élèves, nous supprimons ou modifions celles qui apparaissent marginalement. Pour des raisons informatiques (risque d'explosion combinatoire), nous tenons aussi compte du rapport du nombre d'applications d'une règle par le nombre de ses occurrences. Si ce taux est trop élevé, la règle s'applique souvent de façon inutile ; nous pouvons chercher à ajouter des conditions liées au contexte, dont la forme du but, pour l'appliquer moins souvent.

Progresser le long d'une spirale composée de l'identification manuelle des règles, et de l'analyse des résultats du diagnostic automatique a demandé plusieurs centaines d'heures de travail de didacticiens et d'informaticiens. Le résultat est l'obtention d'une bibliothèque de règles de calcul algébrique *non marginales* utilisées par les élèves.

IV. ETUDE DE CAS : MODELISATION DES CONNAISSANCES DES ELEVES DANS LE DOMAINE DE LA RESOLUTION DES EQUATIONS DE DEGRE 1

Dans ce paragraphe nous reprenons la recherche que nous avions menée dans le cadre du projet « Cognitique » (Nicaud & al., 2005) à propos de la résolution des équations de degré 1. Précisons que dans l'étude initiale nous n'avions pas utilisé le modèle praxéologique mais le modèle des théorèmes en acte s'inscrivant dans la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1991). Nous la présentons ici telle qu'elle a été faite dans le cadre du projet « Cognitique » et qui a donné lieu à plusieurs publications comme (Nicaud, Chaachoua, & Bittar, 2006) ou (Chaachoua, Bittar, & Nicaud, 2006).

Avant de présenter la modélisation, nous rappelons les concepts de la théorie des champs conceptuels pour la modélisation des connaissances.

Le point de départ de cette théorie est que les conduites des élèves (hésitations, erreurs, décisions…) dans des situations de résolution de problèmes sont structurées par des schèmes. L'auteur définit le «schème» par "*l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée*. C'est dans les schèmes qu'il faut rechercher les connaissances-en-acte du sujet, c'est-à-dire les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire" (Vergnaud, 1991). Un schème repose sur :

- un ensemble d'invariants opératoires (concepts-en-acte et théorèmes-en-acte),

- des anticipations du but à atteindre,

- des règles d'actions qui permettent de générer les actions du sujet

- des inférences ou des raisonnements qui permettent de calculer les règles d'actions et donc de mettre en œuvre le schème dans chaque situation particulière.

Un thèorème-en-acte est un invariant de type proposition, il est tenu être vrai ou faux. "Les concepts se développent dans l'action et sous tendent les formes d'organisation de l'activité que sont les schèmes. Il n'y a pas d'action possible sans propositions tenues pour vraies sur le réel. Ce sont justement ces propositions tenues pour vraies que j'appelle théorèmes-en-acte, y compris pour d'autres domaines d'activité que les mathématiques. Leur portée est souvent locale (elle l'est toujours dans la phase d'émergence); ils peuvent rester implicites; ils peuvent même être faux" (Vergnaud, 2001).

Par exemple[25], un schème de résolution des équations de degré 1 de la forme ax+b=c repose sur des théorèmes-en-acte comme "on conserve l'égalité en soustrayant b des deux côtés" et des règles d'actions comme "si a+b=c alors a+b-b=c-b".

IV.1. Une modélisation par des règles de réécriture

Une très grande partie des calculs d'algèbre formelle s'effectue en appliquant des règles de réécriture, selon le principe du remplacement d'égaux (Dershowitz & Jouannaud, 1989). Une règle de réécriture R est un objet de la forme A → B. Elle est applicable à une expression E si A s'unifie à une sous-expression U de E. L'application consiste à remplacer U dans E par B. Lorsque l'on utilise un résolveur de référence, les règles sont issues d'identités fournies par des axiomes ou des théorèmes. Ainsi, l'identité A(B+C)=AB+AC produit-elle une règle de développement A(B+C) → AB+AC et une règle de factorisation AB+AC → A(B+C). Un raisonnement algébrique est principalement présenté par une succession d'étapes de calcul

25 Tiré de (Vergnaud, 1991, p. 137)

dont chacune est produite à partir de la précédente en appliquant plusieurs règles de réécriture. Par exemple, le passage de l'étape $2x(3x^2\text{-}4)$ à l'étape $6x^3\text{-}8x$ peut être produit par l'application de la règle de développement ci-dessus et de règles de réduction.

Lorsqu'un élève résout un exercice d'algèbre formelle, il produit aussi des étapes de calcul. Notre modèle cherche à interpréter ces productions d'étapes par l'application de règles de réécriture correctes ou erronées, à l'instar d'Anderson (Anderson, Boyle, Corbett, & Lewis, 1990). Par exemple, si l'élève est passé de $2x(3x^2\text{-}4)$ à $6x^3\text{-}4$, nous pouvons interpréter cette transformation par l'application de la règles erronée A(B+C) → AB+C suivie de l'application de règles de réduction correctes.

Dans le cas de la résolution des équations de degré 1 la stratégie principale consiste à développer les deux membres, le cas échéant, puis à isoler la variable en utilisant des théorèmes permettant d'effectuer des opérations sur les deux membres :

On ne change pas les solutions d'une équation en ajoutant ou en retranchant un même nombre aux deux membres de l'équation.

On ne change pas les solutions d'une équation en multipliant ou en divisant par un même nombre non nul les deux membres de l'équation.

Cette technologie peut se traduire par les règles d' « opérations sur les deux membres » suivantes :

Règle 1: A=B → A+C=B+C

Règle 2: A=B → A-C=B-C

Règle 3: A=B → AC=BC (C≠0)

Règle 4: A=B → A/C=B/C (C≠0)

L'application de ces règles se combine à des réductions, ce qui donne naissance à des règles compilées plus efficaces (Anderson, 1983). La règle 1 produit la règle 5 : A+C=B → A=B-C et la règle 6 : C=B → 0=B-C. Dans ces règles, C est enlevé d'un membre pour être placé dans l'autre. Nous parlons de « mouvement », plus précisément de mouvement additif ici. A côté de ces deux règles de mouvement additif de gauche vers la droite, il faut ajouter deux règles (règles 7 et 8) de mouvement additif de droite vers la gauche.

De façon analogue, la règle 4 produit la règle 9 : AC=B → A=B/C (C≠0) et la règle 10 : C=B → 1=B/C (C≠0). Nous parlons ici de mouvement multiplicatif de C. Ces règles doivent être complétées par des règles dans lesquelles le membre de gauche est une fraction, C étant le numérateur ou un facteur du numérateur, puis par les règles semblables de droite vers la gauche.

De façon analogue, la règle 3 produit des règles de mouvement multiplicatif d'un terme pris au dénominateur.

On dénombre ainsi 20 *règles correctes détaillées* pour les mouvements dans les équations.

IV.2. Une règle unique de mouvement

Le nombre de règles erronées détaillées détectées dans les protocoles d'élèves travaillant sur des équations du premier degré se porte à 34. En voici un exemple : AC = B → A = B – C. La notion de mouvement est encore présente : l'argument C est passé d'un membre à l'autre. Cette notion de mouvement d'argument (terme ou facteur), correct ou erroné, suggère de regrouper l'ensemble de ces règles en une seule, qu'on appellera *règle abstraite*.

Pour cela, nous qualifions l'argument d'additif s'il se trouve dans une somme située dans un membre de l'équation ou s'il est lui-même un membre de l'équation. Quand le mouvement est effectué correctement, l'argument est encore additif, dans l'autre membre, et il a changé de signe syntaxique. L'argument est dit multiplicatif s'il se trouve dans une multiplication située dans un membre de l'équation. Dans ce cas, l'argument peut être « multiplicatif au numérateur », ce qui signifie qu'il est un facteur d'un membre de l'équation ou du numérateur d'une fraction qui est un membre de l'équation ; l'argument peut être « multiplicatif au dénominateur », ce qui signifie qu'il est un facteur du dénominateur d'une fraction qui est un membre de l'équation. Quand le mouvement est effectué correctement, l'argument est encore multiplicatif dans l'autre membre (au dénominateur s'il vient du numérateur et au numérateur s'il vient du dénominateur), il n'a pas changé de signe syntaxique, mais, dans le cas d'une inéquation, le sens de l'inéquation a changé si le signe sémantique (nombre positif ou négatif) de l'argument est négatif.

Nous pouvons maintenant décrire les mouvements (corrects ou erronés) avec une seule règle, intitulée *Mouvement*, à laquelle on associe un vecteur de sept variables, variables dont les noms sont indiqués ci-dessous, suivis des valeurs, exprimées à l'aide de noms symboliques, qu'elles peuvent prendre :

<u>Symbole de relation</u> : parmi (= ≠ < ≤ > ≥).

<u>Position de l'argument à l'origine</u>

"PosOrgArgEstAdd" si la position d'origine de l'argument est additive.

"PosOrgArgEstMult" si la position d'origine de l'argument est multiplicative.

<u>Position finale de l'argument</u>

"PosFinaleArgEstAdd" : la position finale de l'argument est additive.

"PosFinaleArgEstMult" : la position finale de l'argument est multiplicative.

<u>Orientation horizontale du mouvement</u> : parmi (GaucheDroite DoiteGauche).

<u>Orientation verticale du mouvement</u> : parmi (NumVersNum, NumVersDeno, NumVersDeno, DenoVersNum, DenoVersDeno), « Num » signifiant numérateur et « Deno » signifiant dénominateur.

<u>Changement de signe de l'argument</u>

"ChangeSigneArg" : le signe de l'argument est changé lors du mouvement.

"ChangePasSigneArg" : le signe de l'argument n'est pas changé.

<u>Changement de sens</u>

"ChangePasSens" : le sens de l'inégalité n'est pas changé.

"ChangeSens" : le sens de l'inégalité est changé.

Figure 27 : Règle abstraite « mouvement »

Dans cette règle, nous avons regroupé le cas des équations et inéquations de degré 1. La dernière variable du vecteur ne concerne que le cas des inéquations.

Par exemple, la transformation erronée « $2x - 4 = 5 \rightarrow 2x = 5 - 4$ » est représentée par un *Mouvement* de -4 de vecteur : (=, GaucheDroite, NumVersNum, PosOrgArgEstAdd PosFinaleArgEstAdd, ChangePasSigneArg). La règle détaillée correspondante peut être produite à partir du vecteur, c'est : A+C = B → A = B+C.

Les règles détaillées ne sont alors plus écrites comme les 54 (20 + 34) règles analysées a priori mais comme un vecteur, instanciation de la règle abstraite, soit 800 règles, produit d'une seule règle abstraite.

Les sept variables de ce vecteur sont en fait de deux types : celles qui décrivent l'expression initiale (les deux premières variables), et celles qui décrivent l'action (les cinq autres). Les variables du premier type font partie des *variables de contexte* que nous présenterons dans la suite.

IV.3. Anaïs : Algorithme de diagnostic local basé sur une bibliothèque de règles

Un algorithme utilisant la bibliothèque de règles correctes et incorrectes, mettant en œuvre une recherche heuristique en chaînage avant, a été conçu et utilisé pour effectuer le diagnostic (Pearl, 1984). Ce travail a été réalisé par les informaticiens de l'équipe qui ont développé un logiciel, nommé Anaïs, mettant en œuvre cet algorithme, pour analyser les productions des élèves, enregistrées dans des bases de données[26]. Il utilise, pour cela, les règles mises en œuvre, en tentant de trouver le meilleur enchaînement de ces règles entre deux expressions données, constituant un pas de calcul : la source et le but.

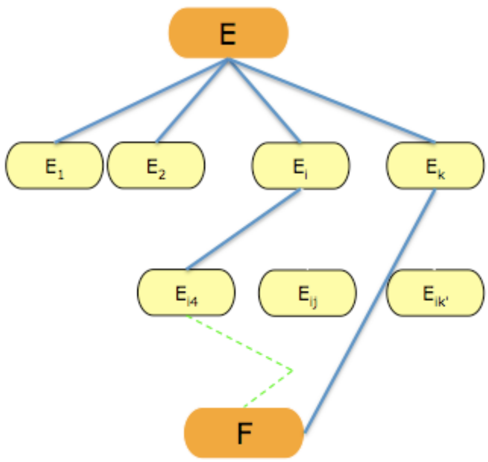


Figure 28 : Illustration de la recherche heuristique en chaînage avant. « E » étant la source et « F » le but à atteindre. Anais applique toutes les règles « E », et on obtient les expressions E_1 à E_k.

– Partant de la source, Anaïs développe un arbre en appliquant toutes les règles applicables à cette expression.

– L'application d'une règle produit un nouveau nœud et Anaïs construit ainsi, de proche en proche, un arbre de recherche, en choisissant, à chaque étape, un nœud à développer, le choix se faisant selon une heuristique tenant compte de la distance au but à atteindre.

– Lorsque le processus réussit, le but peut être atteint par plusieurs chemins. La sélection du meilleur chemin, comme résultat, se base sur un coût des chemins. Ce coût tient compte principalement du nombre de règles constituant le chemin. Différents chemins peuvent avoir le même coût, auquel cas, ils sont tous présentés comme des résultats, explications possibles du pas de calcul de l'élève. Les autres chemins (de coût plus élevé) sont conservés et présentés à la suite des « meilleurs » résultats.

---

26 Voir à ce propos (Nicaud, 2005)

Le logiciel Anaïs découpe chaque pas de calcul de l'élève en une séquence d'étapes élémentaires sous la forme de règles. Il produit ainsi une trace enrichie sémantiquement et plus concise que la trace brute représentant une interprétation plausible de l'activité de l'élève.

Considérons la résolution d'une équation de degré 1 faite par un élève (Figure 29)

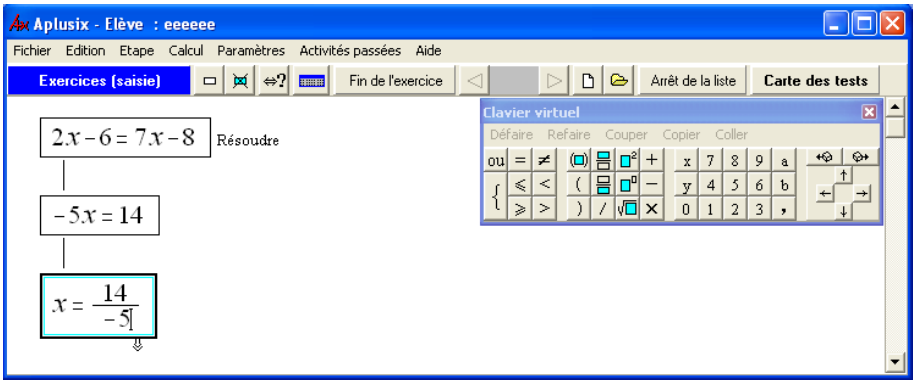


Figure 29. Copie d'écran d'Aplusix. L'élève résout une équation en plusieurs étapes.

La transformation $2x\text{-}6 = 7x\text{-}8 \rightarrow \text{-}5x = 14$ est diagnostiquée par l'application de quatre règles :

Mouvement additif de -6 sans changer de signe (erroné)

Mouvement additif de $7x$ en changeant de signe (correct)

Groupement additif $2x\text{-}7x \rightarrow \text{-}5x$ (correct)

Somme de 2 entiers $\text{-}8\text{-}6 \rightarrow 14$ (erroné)

Ce diagnostic considère comme si le raisonnement de l'élève pour la première étape était :

$2x\text{-}6=7x\text{-}8 \rightarrow 2x=7x\text{-}8\text{-}6 \rightarrow 2x\text{-}7x=\text{-}8\text{-}6 \rightarrow \text{-}5x=\text{-}8\text{-}6 \rightarrow \text{-}5x=14.$

En fait Anaïs produit plusieurs diagnostics en proposant le meilleur diagnostic.

La Figure 30 montre ce qui est affiché par ANAÏS lorsque l'on a lancé ce diagnostic *à la main*.

```
(Diagnostiquer <<2x+4 < 7x-6 → -5x < -2>>)

Diagnostic No 1, coût=9 (transformation ERRONEE)
BUT : 2x+4<7x-6 → -5x<-2
transformation : 2x+4<7x-6 → 2x+4-7x<-6
  >>> Mouvement additif de 7x (DroiteGauche ChangeSigneArg ChangePasSens correct)
transformation : 2x-7x → -5x
  >>> Groupement additif (correct)
expression obtenue : -5x+4<-6
transformation : -5x+4<-6 → -5x<-6+4
  >>> Mouvement additif de 4 (GaucheDroite ChangePasSigneArg ChangePasSens errone)
SOUS-BUT : -6+4 → -2
transformation : -6+4 → -2
  >>> par la règle RES_PlusEntier : calcul de la somme de 2 entiers

Diagnostic No 2, coût=10 (transformation ERRONEE)
BUT : 2x+4<7x-6 → -5x<-2
transformation : 2x+4<7x-6 → 2x+4-7x<-6
  >>> Mouvement additif de 7x (DroiteGauche ChangeSigneArg ChangePasSens correct)
transformation : 2x-7x → -5x
  >>> Groupement additif (correct)
expression obtenue : -5x+4<-6
transformation : -5x+4<-6 → -5x<-6-4
  >>> Mouvement additif de 4 (GaucheDroite ChangeSigneArg ChangePasSens correct)
SOUS-BUT : -6-4 → -2
transformation : -6-4 → -2
      >>> par la règle ER_somme : Somme erronée
```

Figure 30. Affichage d'ANAÏS lorsque l'on a lancé un diagnostic à la main. Un tel lancement à la main s'effectue dans des phases de mise au point ou lorsque l'on veut étudier quelques transformations. En fonctionnement normal, ANAÏS va chercher les transformations à étudier dans des fichiers de protocoles et produit des fichiers de résultats.

Croset a précisé les principes fondamentaux qui sont relativement fréquents dans les tuteurs qui permettent de marquer une préférence sur les diagnostics en termes de qualité :

« **Principes généraux du diagnostic** :

Préférer un diagnostic court à un diagnostic long. Autrement dit, entre deux diagnostics du même pas de calcul, le diagnostic ayant le moins de règles sera privilégié.

Préférer une erreur unique à une combinaison d'erreurs. Ce principe rejoint le précédent : la qualité du diagnostic dépend de sa longueur.

Préférer une erreur spécifique à une erreur générale. Ceci aura une influence sur les coefficients associés aux règles.

Supposer que la réponse correcte visée est la plus proche possible de la réponse incorrecte fournie. Prendre l'hypothèse inverse amènerait à reconnaître, dans toute proposition correcte, la combinaison de plusieurs erreurs s'annulant mutuellement. » (Croset, 2009, p. 85)

Nous avons comparé les diagnostics automatiques à une analyse manuelle sur un ensemble de pas de calculs. Comparé à une analyse à la main, l'algorithme heuristique peut atteindre plus de 90% de satisfaction sur les diagnostics de pas de calcul corrects. Quant aux pas de calcul erronés, l'analyse s'est faite par genre de tâches. Par exemple, dans le domaine du développement et réduction d'expressions, l'analyse a porté sur une classe de 4^{e} et une classe de 3^{e}. Les 50 élèves de cette expérimentation ont effectué un total de 188 transformations erronées. 79% d'entre elles sont correctement diagnostiquées par Anaïs. Le diagnostic automatique est en échec sur 14% des transformations : aucune séquence de règles n'a été trouvée. L'échec du diagnostic sur une transformation erronée peut, cependant, être en accord avec l'analyse manuelle si l'erreur est considérée comme marginale ou inexplicable, ce qui est le cas pour 10% des transformations diagnostiquées.

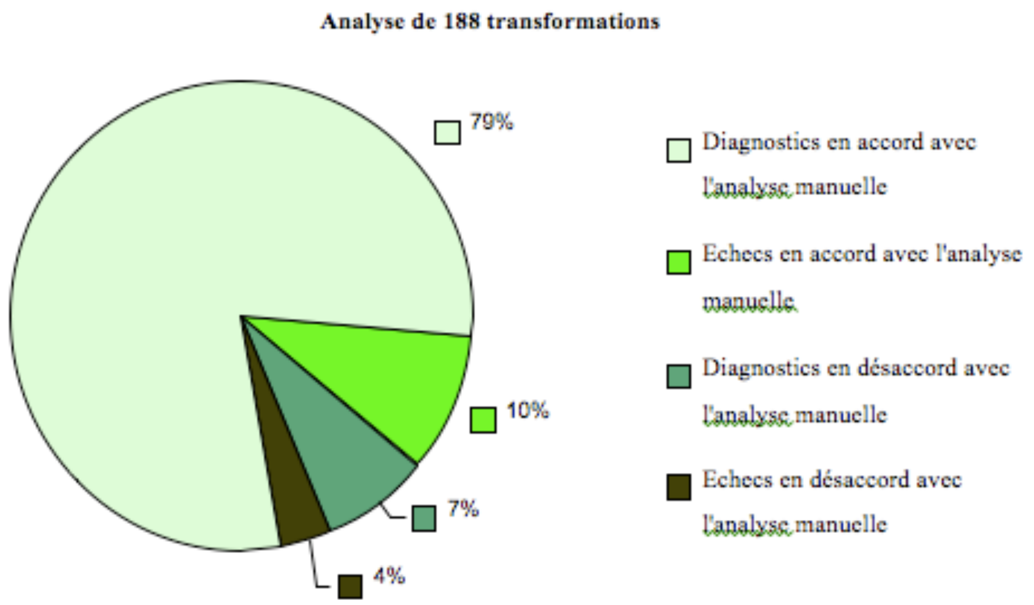


Figure 31 : Comparaison des diagnostics automatiques à l'analyse manuelle

IV.4. Modélisation globale des connaissances de l'élève

Nous avons présenté une modélisation locale permettant de passer d'une trace brute d'activité d'élève à une trace enrichie. Décrite sous forme de règles diagnostiquées à partir des pas de calcul d'élèves, cette modélisation et ce niveau de traces ne permettent pas de comprendre le fonctionnement cognitif de l'élève au niveau des tâches algébriques. Pour cela, nous proposons de partir des règles diagnostiquées par Anaïs, de les regrouper et de les interpréter pour produire une modélisation des connaissances à un niveau supérieur : celui des tâches algébriques. Dans la suite, notre travail repose sur le découpage obtenu par le diagnostic local et les traces enrichies. Nous appelons dorénavant « pas de calcul », le pas de calcul *élémentaire* diagnostiqué par Anaïs, sans revenir au pas de calcul de l'élève.

IV.4.1. Modélisation des activités algébriques transformationnelles

Un pas de calcul est décrit par une règle détaillée. Les règles détaillées présentent une certaine complexité, puisqu'elles se veulent très précises sur l'action faite par l'élève.

Les règles détaillées peuvent être décrites en fonction des caractéristiques portant :

- soit sur l'expression initiale. Nous les appellerons *variables de contexte* : ce sont les éléments d'une expression algébrique pouvant avoir une influence sur le comportement de l'élève. Par exemple, la position de l'argument à l'origine dans un genre de tâche de mouvement.

- soit sur la transformation d'une expression en une autre. Nous les appellerons *traits*. Ce sont les différents « angles » sous lesquels peut être vue une règle détaillée. Par exemple, la transformation erronée d'une somme de deux monômes, ax^n et bx^m, en un monôme, $(a + b)x^{n+m}$, peut être vue sous deux angles (traits) : d'une part, la transformation des coefficients a et b en un coefficient c. D'autre part, la transformation des degrés n et m en un degré p. Le trait « coefficient » prend, dans notre exemple, la valeur « somme des coefficients initiaux » (a + b) et le trait « degré », la valeur « somme des degrés initiaux » (n + m). Quant à la règle « mouvement », nous obtenons trois traits : le signe, l'opérateur et le sens.

Pour réduire la complexité d'une règle détaillée[27], nous projetons la règle selon l'un des traits : nous définissons un *Vecteur du Comportement Local selon un trait T*, que nous notons VCL (trait), comme le vecteur constitué, d'une part, des variables de contexte de la règle détaillée et, d'autre part, de la valeur du trait T. Par suite, à une règle détaillée, nous associons autant de VCL (trait) que la règle a de traits. Par exemple, à chaque pas de calcul de « mouvement », nous associons trois VCL : le VCL (signe de l'argument), le VCL (opérateur de l'argument), le VCL (sens de l'inéquation). Le dernier trait n'existant que si la variable de contexte « symbole de relation » prend la valeur inéquation.

Les VCL proposent un découpage et une réorganisation des faits relevés par un observateur. Il s'agit d'un niveau comportemental de la modélisation de l'élève (Wenger, 1987). Le choix des événements qui doivent être pris en compte pour ce niveau est le résultat des décisions de l'observateur, comme le souligne Balacheff « la modélisation comportementale exige donc un premier niveau d'interprétation, celui de l'organisation du réel » (ibid. p. 26).

Notre méthodologie générale pour l'obtention d'une modélisation globale repose sur deux axes qui se développent en étroite interaction :

---

27 Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe IV.6

Axe 1 : Construction du modèle

Il s'agit de trouver un moyen de découper le réel et de l'organiser en vue de caractériser les comportements des élèves en termes de théorèmes-en-acte. La construction se fait autour des points suivants :

- distinguer les variables de contexte des traits au sein des règles détaillées fournies par le diagnostic automatique,

- réaliser des expérimentations spécifiques pour affiner et valider le modèle,

- regrouper des règles détaillées en traits, caractériser les règles d'action, et les théorèmes-en-acte.

Une de difficultés de la modélisation est de trouver un niveau de granularité pertinent pour les interprétations. En effet, plus il est fin, mieux il permet de rendre compte du contexte, mais plus il risque de cacher les régularités entre le contexte et les actions.

Axe 2 : Construction du mécanisme de diagnostic

Il s'agit d'implanter le modèle au niveau informatique et plus précisément :

- de construire un mécanisme permettant de diagnostiquer, pour chaque trait, les VCL *stables* selon des critères de stabilité à définir. Les VCL stables correspondent aux règles d'action de (Vergnaud, 1991),

- de construire un mécanisme qui permet de regrouper les règles d'actions sous forme de théorèmes-en-acte, (ibid.),

Cette méthodologie a été mise en œuvre uniquement pour le genre de tâche « mouvement ».

IV.4.2. Description des VCL (trait)

Nous présentons ci-dessous les VCL (trait) pour les trois traits du mouvement. Ces vecteurs sont décrits par (Nom du vecteur ; variables de contexte instanciées ; Action). Les variables de contexte, sont au nombre de trois :

- type de relation : Eq (pour équation) ou Ineq (pour inéquation) ou vide,

- position d'origine de l'argument : Add (pour additif), Mult (pour multiplicatif), Num (pour numérateur) ou Deno (pour dénominateur),

- signe de l'argument : plus ou moins.

Nous obtenons les trois vecteurs de comportements locaux (VCL) :

- VCL (signe) = (VCLP-Signe-X ; Type de relation, Position de l'argument à l'origine, Signe de l'argument ; Action sur le signe). Les actions possibles sur le signe sont : ChangeSigneArg (le signe de l'argument est changé) et ChangePasSigneArg (le signe de l'argument n'est pas changé). On obtient 16 valeurs possibles de ce vecteur dont 8 expriment des règles correctes,

- VCL (sens) = (VCLP-Sens-X ; inéquation, Position de l'argument à l'origine, Signe de l'argument ; Action sur le sens). Les actions possibles sur le sens sont ChangePasSens (le sens de l'inégalité n'est pas changé), ChangeSens (le sens de l'inégalité est changé). On obtient 8 valeurs possibles de ce vecteur dont 4 expriment des règles correctes,

- VCL (opérateur) = (VCLP-Opérateur-X ; Type de relation, Position de l'argument à l'origine, Signe de l'argument ; Action sur l'opérateur). Les actions possibles sur l'opérateur sont : Additif (l'argument est additif dans la position finale (a+x)), Multiplicatif-Numérateur (l'argument est multiplicatif au numérateur dans la position finale (a*x)), Multiplicatif-Dénominateur (l'argument est multiplicatif au dénominateur dans la position finale (x/a)). On obtient 18 valeurs possibles de ce vecteur, dont 6 expriment des règles correctes.

Un VCL (trait) est une projection de la règle détaillée. En cela, il y a perte d'informations entre la règle détaillée et l'interprétation du VCL (trait). Par exemple, le vecteur (VCLP-Signe-1a equation PosOrgArgEstAdd SigneArgEstPlus ChangePasSigneArg) peut être interprété par la règle : « Si l'argument à déplacer, d'un membre d'une équation à l'autre membre, est en position additive et de signe positif, alors on ne change pas de signe après le mouvement », ou encore « si a+b=c alors b=c¤a ou b=a¤c où ¤ désigne un opérateur parmi +, *, / » tandis que la règle détaillée précise quel est l'opérateur final.

IV.4.3. Détermination et organisation a priori des théorèmes-en-actes

Pour chaque trait de la tâche « mouvement », nous avons défini des théorèmes-en-acte globaux (*TeA globaux*) (cf. annexe 3). Un TeA global est un ensemble d'actions de même type, quelque soit le contexte. C'est-à-dire une utilisation régulière du même VCL (trait) dans différents contextes. Pour le trait « signe », les TeA globaux sont au nombre de cinq. Par exemple, le TeA global « Conservation du Signe » signifie que quelque soit les valeurs prises par les trois variables de contexte (type de relation, position et signe de l'argument), le signe n'est jamais modifié lors d'un mouvement d'argument. Ce TeA est parfois correct ou incorrect selon les valeurs prises par les variables de contexte, comme nous le réexpliquerons ci-après.

Ces théorèmes-en-acte globaux peuvent être particularisés selon que l'on fixe la valeur d'une, de deux ou de trois des trois variables de contexte. Si aucune variable de contexte n'est fixée, le contexte est donc général, on obtient les TeA globaux eux-mêmes, que l'on nomme aussi TeA de profondeur 0. Si une seule variable est fixée (respectivement deux, respectivement trois), la profondeur du TeA est de 1 (respectivement 2, respectivement 3). La profondeur 3 correspond aux règles d'actions, décrites ci-dessous (ce sont des VCL (trait) qui ont montré une certaine stabilité). Cela forme une hiérarchie de TeA en forme de treillis dont les racines sont les TeA globaux, chacun ayant des descendants, et dont les feuilles sont les règles d'action, comme indiqué sur les treillis présentés en annexe 4. Nous appellerons *contexte* un triplet de valeurs des trois variables. Nous appellerons théorèmes-en-actes (TeA) une des quatre décompositions possibles des TeA globaux.

Par exemple, le TeA « Conservation du Signe » lorsque la variable type de relation prend la valeur équation (« Eq »), signifie qu'il y a conservation du signe de l'argument dans le mouvement d'une *équation*, quelles que soient les valeurs prises par les variables position et signe de l'argument. Ce TeA est de profondeur 1. Le nom associé à ce TeA est le nom du TeA global dont il dépend suivi des valeurs fixées des variables. Pour cet exemple, le TeA est nommé « Conservation du Signe- Eq ».

Selon la profondeur, le TeA peut être correct, c'est-à-dire correspondant à une règle algébrique correcte, ou incorrect. Un TeA est correct s'il est diagnostiqué directement à partir des VCL corrects ou si tous ses descendants sont corrects. Dans ce cas, son domaine de validité est le contexte dans lequel il est défini (cf. les treillis en annexe 4) : les TeA corrects sont représentés en clair.

Dans les autres cas, le TeA est incorrect pour le contexte où il est défini, dans la mesure où un ou plusieurs de ses descendants sont des TeA incorrects. Cependant, son domaine de validité n'est pas nécessairement vide, il est constitué de l'ensemble des domaines de validité de ses descendants.

Par exemple : le TeA « conservation de l'opérateur » qui consiste à reporter le même opérateur dans l'autre membre, n'est pas correct dans le contexte le plus général. Son domaine de validité est le contexte additif (c'est-à-dire lorsque la variable « position » d'origine de l'argument prend la valeur « additif »).

IV.4.4. Détermination des théorèmes-en-acte

Dans ce paragraphe, nous nous limitons au trait « signe ». Le diagnostic des théorèmes-en-acte se fait en deux étapes, à la suite du diagnostic local en commençant par un mécanisme de calcul type *overlay*, et en se poursuivant par un algorithme de généralisation.

Étape 1 : Détermination automatique des VCL stables.

Nous définissons les *règles d'action* par un VCL (trait) *stable*. Nous définissons *stable* par le fait que l'élève a le même comportement, c'est-à-dire qu'il utilise la même valeur du trait, à chaque fois qu'il se trouve dans un contexte donné. Etant donné que l'élève n'a pas toujours un comportement stable, il faut déterminer quel est la valeur du trait qui représente le mieux son comportement. Ainsi, pour le trait « signe », deux valeurs sont possibles (le signe est changé et le signe n'est pas changé), il faut déterminer parmi ces deux valeurs celle qui est la plus utilisée par un élève et « combien » elle est utilisée.

À une liste de k pas de calcul d'élèves concernant la tâche « mouvement » est associée la liste des k règles détaillées du diagnostic local. De là, nous construisons la liste des k VCL (signe) (respectivement, VCL (opérateur), etc.). Pour un contexte, nous étudions la stabilité des VCL correspondants. Par exemple, pour le contexte (Equation, PosOrgArgEstAdd, SigneArgEstPlus), il y a n VCL (signe). Soit n_1, le nombre d'occurrences de VCL qui ont pour valeur de trait ChangePasSigneArg et n_2, le nombre d'occurrences de VCL qui ont pour valeur de trait ChangeSigneArg ($n_1 + n_2 = n$). Le rapport n_1/n est appelé coefficient du VCL.

Nous attribuons trois statuts aux données par rapport au contexte :

- insuffisantes si $n \leq 3$,
- suffisantes-instables si $n \geq 4$ et ($n_1/n \leq 0.75$ et $n_2/n \leq 0.75$),
- suffisantes-stables si $n \geq 4$ et ($n_1/n \geq 0.75$ ou $n_2/n \geq 0.75$).

Dans le premier cas, nous n'avons pas suffisamment de données pour produire un diagnostic sur les connaissances de l'élève. Dans le deuxième cas, nous avons des données significatives mais elles ne permettent pas de déterminer une corrélation entre le contexte et les actions. Enfin, le troisième cas nous permet de faire l'hypothèse d'une certaine stabilité du comportement de l'élève et nous pouvons donc déduire une corrélation entre le contexte et l'action dont le nombre d'occurrences est le plus grand. Par exemple, si pour le contexte (Equation, PosOrgArgEstAdd, SigneArgEstPlus) il y a des données suffisantes-stables avec n_2 majoritaire, nous diagnostiquons une corrélation entre ce contexte et l'action ChangeSigneArg, et nous considérons Le VCL (signe) (Equation, PosOrgArgEstAdd, SigneArgEstPlus, ChangeSigneArg) comme un comportement pertinent pour le diagnostic des théorèmes-en-acte, car il exprime une régularité dans le comportement de l'élève. En fait ce comportement pertinent diagnostiqué est une règle d'action, au sens défini plus haut.

Étape 2 : Détermination automatique des théorèmes-en-acte et généralisation.

La construction des TeA se fait par association de règles d'action ayant une valeur de variable de contexte commune. Par exemple si les deux VCL (Equation PosOrgArgEstMult SigneArgEstPlus ChangePasSigneArg) et (Equation PosOrgArgEstMult SigneArgEstMoins ChangeSigneArg) ont montré une certaine stabilité, ils ont alors été diagnostiqués comme des règles d'action. Leur utilisation conjointe par un même élève contribue à lui associer le TeA « ValeurAbsolue-Equation-Multiplicatif », qui signifie que l'élève conserve le signe de l'argument quand il effectue un mouvement dans une équation et que la position d'origine de l'argument est « multiplicatif ».

Un coefficient est associé aux TeA se trouvant en conclusion de ces règles pour évaluer la validité. Il est calculé comme la moyenne géométrique des coefficients des VCL. Lorsque le passage des VCL aux TeA est réalisé, une propagation des coefficients est effectuée dans les hiérarchies de TeA. Les coefficients associés aux VCL et aux TeA sont des formes de facteurs de certitude (Buchanan & Shortliffe, 1984). Les TeA qui sont produits comme résultats du processus sont ceux qui ont le contexte le plus large, c'est-à-dire qui sont les plus hauts dans la hiérarchie. En d'autres termes, si un TeA T1 est élu et si son père T2 est aussi élu, T1 n'est pas présenté comme résultat car il est inclus dans T2. Ce processus permet d'obtenir un modèle de l'élève sur chaque trait, comme le montre l'exemple ci-dessous pour le trait signe.

```
                             LES VCLP

VCLP-Signe-1b : MoveDansRelation equation PosOrgArgEstAdd SigneArgEstPlus ChangeSigneArg 5 (COEF : 1)
VCLP-Signe-2b : MoveDansRelation equation PosOrgArgEstAdd SigneArgEstMoins ChangeSigneArg 5 (COEF : 1)
VCLP-Signe-3a : MoveDansRelation equation PosOrgArgEstMult SigneArgEstPlus ChangePasSigneArg 6 (COEF : 0.75)
VCLP-Signe-3b : MoveDansRelation equation PosOrgArgEstMult SigneArgEstPlus ChangeSigneArg 2
VCLP-Signe-4a : MoveDansRelation equation PosOrgArgEstMult SigneArgEstMoins ChangePasSigneArg 1
VCLP-Signe-4b : MoveDansRelation equation PosOrgArgEstMult SigneArgEstMoins ChangeSigneArg 5 (COEF : 0.83)

=======================================================================

                             LES CONCEPTIONS

      ValeurAbsoluePartielleM-eq (COEF : 0.89)
            [fille] ValeurAbsolue-eq-mult (COEF : 0.79)
            [fille] ChangementSigne-eq-add (COEF : 1)
```

Figure 32 : Extrait d'un modèle de l'élève. Les cinq premières lignes donnent les résultats du diagnostic des VCL (nom du VCL suivi des variables de contexte, de l'action et du nombre d'occurrence du VCL pour un élève). Les trois dernières lignes sont des diagnostics des théorèmes-en-acte de l'élève (nom du TeA et son coefficient associé) obtenus à partir des VCL ci-dessus.

IV.5. Quelques résultats

Nous présentons ici quelques résultats issus de cette recherche[28] relatifs au trait « signe de l'argument ».

Nous avons mis en place des expérimentations pour déterminer les théorèmes-en-acte des élèves relatifs au changement de signe dans les équations, selon le modèle décrit ci-dessus. Les exercices ont porté sur des équations et inéquations dont la résolution nécessite des mouvements additifs et multiplicatifs d'arguments qui peuvent être de signe "+" ou "–". Pour ne pas mettre les élèves en difficulté sur des tâches qui ne concernent pas directement les théorèmes-en-acte sur les mouvements, nous avons choisi des exercices avec des coefficients entiers et avec des développements simples.

28 Le lecteur peut consulter d'autres résultats de cette recherche dans le rapport du projet « cognitique » (Nicaud, J.F. & al. 2005).

Ces expérimentations étaient réalisées auprès de 3186 élèves, dont 2503 élèves brésiliens et 683 élèves français. La répartition de l'ensemble des TeA relatifs au « Signe dans le mouvement » pour ces élèves est donnée en annexe 5. Nous constatons que 13,7% des TeA sont erronés et qu'ils concernent essentiellement les contextes Multiplicatif ou Inéquation.

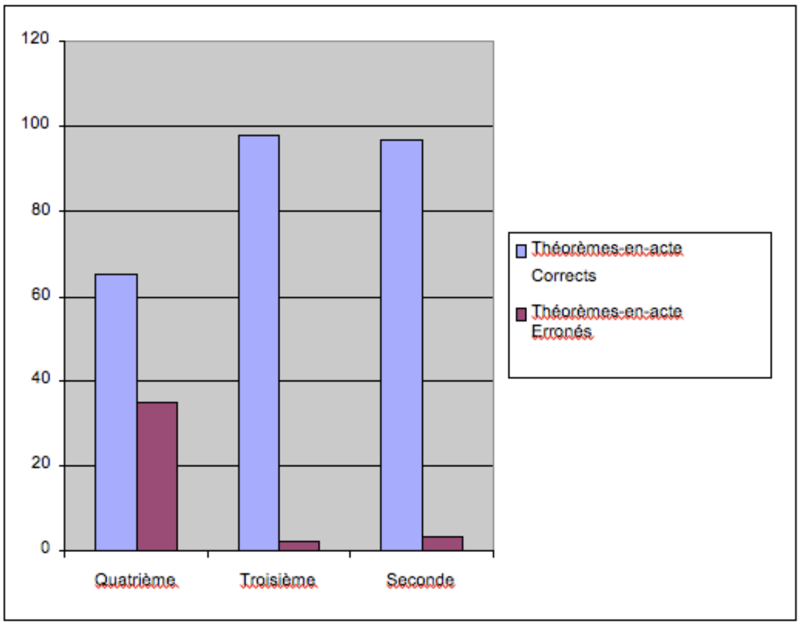


Figure 33 : Evolution des théorèmes-en-acte corrects ou non

Nous avons analysé l'évolution des TeA des élèves français entre les niveaux 4e, 3e et 2nd (cf. Figure 34). Le nombre d'élèves ayant un TeA erroné diminue en passant de 35% à 3% et le nombre d'élèves ayant un TeA correct augmente en passant de 65% à 97%. Cependant, si on examine l'évolution des TeA corrects entre ces deux niveaux, on constate qu'en classe de seconde les TeA corrects diagnostiqués sont plus dispersés par rapport au contexte que ceux de la classe de quatrième. En effet, le TeA SigneCorrect de niveau de profondeur 0 passe de 28.1% à 17,7% et les TeA corrects de profondeur 1 passent de 0 à 10% (pour SigneCorrect-Equation), 6.2% (pour SigneCorrect-Inequation) et 22.4% (pour Conservation-signe-Multiplicatif). De même, on a plus de dispersion des TeA corrects de niveau de profondeur 3 en classe de seconde qu'en classe de quatrième. Ces résultats montrent que l'évolution des TeA corrects entre la classe de quatrième et seconde est accompagnée des dispersions des TeA corrects au niveau des contextes additif et équation.

IV.6. Conclusion

L'élaboration du modèle proposé a pris en compte deux préoccupations : l'une d'ordre didactique, en se plaçant dans un certain paradigme d'apprentissage, et l'autre d'ordre informatique, en imposant un modèle computationnel. Il faut noter que le modèle a été élaboré avec un niveau de granularité plus fin que lorsque l'on effectue une modélisation totalement manuelle des connaissances des élèves.

Nous avons montré que le modèle que nous avions construit, de façon abstraite, a bien été mis en œuvre de façon automatique et a produit du diagnostic sur un plus grand nombre de données.

Revenons sur les raisons de projeter le vecteur de la règle détaillée selon l'un des traits afin de réduire sa complexité. Au début de notre recherche dans le projet « Cognitique » nous cherchions à caractériser les conceptions des élèves à propos de la résolution des équations de degré 1. Ces conceptions devraient être obtenues à partir des théorèmes-en-acte qui sont obtenus par regroupement de règles d'actions, une règle d'action étant une règle diagnostiquée de façon stable chez un même élève.

Dans notre cas d'étude, les règles d'actions sont des règles détaillées de « mouvement » car les autres actions qui interviennent dans la résolution des équations de degré 1 concernent le développement et la réduction qui ne sont pas spécifiques aux équations et qui peuvent être étudiées à part. Nous avons été confronté à la difficulté de trouver un regroupement pertinent des règles d'actions pour obtenir des théorèmes-en-acte. Pour cela nous avions cherché à regrouper les règles par rapport à un des traits (signe, opérateur ou sens). Ce regroupement nous a permis d'obtenir des résultats intéressants surtout pour le trait signe. Mais, comme nous l'avons signalé dans la remarque du paragraphe précédent (IV.5), très peu de théorèmes-en-acte globaux (niveau de profondeur 0) ont été diagnostiqués. D'où une nouvelle fois difficulté de remonter aux conceptions. Ce constat rejoint la position d'Artigue (Artigue, 1990) sur le fait que la conception n'a pas été, de prime abord, considérée comme un outil opératoire car c'est l'objet local qui est l'outil adéquat. Pour cette raison, nous rejoignons Croset (Croset M., 2009) : l'organisation très fine que propose l'approche anthropologique correspond bien à notre besoin de modélisation locale. Ce que nous montrerons dans la suite est que le modèle praxéologique est adéquat également pour la modélisation globale.

V. VERS LE MODELE PRAXEOLOGIQUE : DETERMINATION DES PRAXIS ELEMENTAIRES

Dans ce paragraphe nous proposons d'utiliser le modèle praxéologique pour la modélisation des connaissances des élèves dans l'EIAH Aplusix.

Nous reprenons le même modèle comportemental obtenu dans Aplusix (décrit dans le paragraphe II). A partir de la segmentation des traces brutes nous proposons de construire des traces enrichies qui nous permettrons de construire des praxis élémentaires : il s'agit d'un nouveau modèle épistémique que celui nous avons utilisé dans le projet « Cognitique ». Dans ce paragraphe nous présentons comment on peut passer des règles diagnostiquées au niveau local aux praxis élémentaires de l'élève. Pour cela, nous allons présenter les grandes étapes nécessaires au diagnostic des praxis élémentaires.

V.1. Association des règles aux types de tâches élémentaires

Un pas de calcul de l'élève est découpé en plusieurs transformations-Anaïs[29] (i.e. pas de calcul élémentaire) qui est l'application d'une seule règle détaillée (Croset, 2009, p.173). Le choix a été fait de sorte qu'à chaque transformation-Anaïs est associé un seul type de tâches. Le découpage en types de tâches est celui de l'organisation mathématique de référence construite par le chercheur (cf. Partie B). Le chercheur doit donc rattacher les règles[30], correctes et erronées, aux types de tâches élémentaires de l'organisation mathématiques de référence.

Exemple « mouvement »

---

29 « Une Transformation-Anaïs est le couple transitoire constitué des sous-expressions produites par Anaïs. Il y a autant de règles diagnostiquées que de transformation-Anaïs. » (Croset, 2009, p.112).

30 issues de la bibliothèque des règles.

Reprenons l'exemple étudié dans le paragraphe (IV, partie C) et plus précisément pour les équations de degré 1, à l'aide de notre modèle. Il s'agit du type de tâches $T_{ra\text{-}eq1}$ que nous avons étudié dans le paragraphe (III.1.4.c). Ce type de tâches admet une organisation mathématique définie par :

$OMP(T_{ra\text{-}eq1}) = (T_{ra\text{-}eq1}, \tau_{r\text{-}aeq1}, \theta_{r\text{-}aeq1}, \Theta_{alg})$ dont la technique est décrite par

$\tau_{r\text{-}eq1} = (T_{dev}, \mathit{T}_{mvt\text{-}adt}, T_{red}, \mathit{T}_{mvt\text{-}mult}, \mathit{T}_{test.eg})$.

Les deux types de tâches T_{dev} et T_{red} sont extrinsèques et ont leurs propres organisations mathématiques. En revanche, les deux types de tâches $\mathit{T}_{mvt\text{-}ad}$ et $\mathit{T}_{mvt\text{-}mult}$ sont intrinsèques et constituent les types de tâches principaux de la résolution des équations de degré 1. C'est à ces deux types de tâches élémentaires que nous nous intéressons dans la suite.

Remarques

Dans l'étude initiale (paragraphe IV) la position de l'argument à l'origine (additive ou multiplicative) était une variable du contexte alors que dans notre nouvelle étude elle permet de distinguer deux types de tâches élémentaires de l'organisation mathématique de référence ($\mathit{T}_{mvt\text{-}ad\text{-}eg}$ et $\mathit{T}_{mvt\text{-}mult\text{-}eg}$).

Aux deux types de tâches élémentaires $\mathit{T}_{mvt\text{-}ad\text{-}eg}$ et $\mathit{T}_{mvt\text{-}mult\text{-}eg}$ on peut associer plusieurs règles détaillées qui sont des instanciations de la règle abstraite du mouvement avec comme premier trait du vecteur "=" car il s'agit des équations. Nous avons décidé de ne pas spécifier le 2° trait du vecteur "Orientation Horizontale" car modulo la commutativité de l'égalité, cette information n'a pas beaucoup d'importance au niveau de la règle. En revanche, cette information peut être importante à prendre en compte dans la description du contexte de mise en œuvre de la règle si on estime que l'élève peut avoir des comportements différents selon que le mouvement se fait dans un sens ou un autre.

Type de tâches	Règles associées
$\mathit{T}_{mvt\text{-}ad\text{-}eg}$ a+b=c[31]	**(=, NumVersNum, PosOrgArgEstAdd, PosFinaleArgEstAdd, ChangeSigneArg) (i.e a+b=c → a=c-b)**
	(=, NumVersNum, PosOrgArgEstAdd PosFinaleArgEstAdd, ChangePasSigneArg) (i.e a+b=c → a=c+b)
	(=, NumVersNum, PosOrgArgEstAdd PosFinaleArgEstMult, ChangeSigneArg) (i.e a+b=c → a=cb)
	(=, NumVersNum, PosOrgArgEstAdd PosFinaleArgEstMult, ChangePasSigneArg) (i.e a+b=c → a=-cb)
	(=, NumVersDeno, PosOrgArgEstAdd PosFinaleArgEstMult, ChangeSigneArg) (i.e a+b=c → a=-c/b)
	(=, NumVersDeno, PosOrgArgEstAdd PosFinaleArgEstMult, ChangePasSigneArg) (i.e a+b=c → a=c/b)
$\mathit{T}_{mvt\text{-}mult\text{-}eg}$ ab=c ou	(=, NumVersNum, PosOrgArgEstMult, PosFinaleArgEstAdd, ChangeSigneArg) (i.e ab=c → a=c-b)
	(=, NumVersNum, PosOrgArgEstMult PosFinaleArgEstAdd,

31 Nous n'avons pas pris en compte le cas a-b=c car ce cas sera pris en compte au niveau des variables de contexte.

a/b=c où b≠0	ChangePasSigneArg) (i.e ab=c → a=c+b)
	(=, NumVersNum, PosOrgArgEstMult PosFinaleArgEstMult, ChangeSigneArg) (i.e ab=c → a=cb)
	(=, NumVersNum, PosOrgArgEstMult PosFinaleArgEstMult, ChangePasSigneArg) (i.e ab=c → a=-cb)
	(=, NumVersDeno, PosOrgArgEstMult PosFinaleArgEstMult, ChangeSigneArg) (i.e ab=c → a=-c/b)
	(=, NumVersDeno, PosOrgArgEstMult PosFinaleArgEstMult, ChangePasSigneArg) (i.e ab=c → a=c/b)
	(=, DenoVersNum, PosOrgArgEstMult, PosFinaleArgEstAdd, ChangeSigneArg) (i.e a/b=c → a=c-b)
	(=, DenoVersNum, PosOrgArgEstMult PosFinaleArgEstAdd, ChangePasSigneArg) (i.e a/b=c → a=c+b)
	(=, DenoVersNum, PosOrgArgEstMult PosFinaleArgEstMult, ChangeSigneArg) (i.e a/b=c → a=cb)
	(=, DenoVersNum, PosOrgArgEstMult PosFinaleArgEstMult, ChangePasSigneArg) (i.e a/b=c → a=-cb)
	(=, DenoVersDeno, PosOrgArgEstMult PosFinaleArgEstMult, ChangeSigneArg) (i.e a/b=c → a=-c/b)
	(=, DenoVersDeno, PosOrgArgEstMult PosFinaleArgEstMult, ChangePasSigneArg) (i.e a/b=c → a=c/b)

Tableau 3 : Associations des règles détaillées aux deux types de tâches $T_{mvt\text{-}ad\text{-}eg}$ et $T_{mvt\text{-}mult\text{-}eg}$. En gras, nous avons indiqué les règles correctes.

Dans sa thèse Croset (Croset, 2009, p.155) a fait un travail analogue en associant les règles aux types de tâches considérées comme élémentaires, qui relèvent des trois types de tâches visés : factoriser une expression algébrique, réduire une expression algébrique et développer une expression algébrique.

V.2. Association des variables de contextes aux types de tâches

Un pas de calcul (au sens de pas de calculs élémentaires) est décrit par une règle détaillée qui est une instanciation de la règle abstraite.

Pour considérer cette règle comme élément constituant d'une technique, nous devons chercher une stabilité dans sa mise en œuvre dans un contexte à caractériser. Pour cela nous introduisons la notion de *variables de contexte* comme éléments d'une expression algébrique pouvant avoir une influence sur le comportement de l'élève.

Par exemple, la nature des nombres qui interviennent dans une expression, le signe syntaxique du terme à transposer d'une égalité à une autre, le nombre de termes dans une somme.

Ces variables de contexte sont relatives à un type de tâches dans la mesure où certaines variables ont une influence sur le comportement de l'élève sur un type de tâches et pas sur un autre. Donc à chaque type de tâches, le chercheur associe un ensemble de variables de contexte. (Croset, 2009) nomme cet ensemble *groupe de variables de contexte associées à* T, noté G(T).

La détermination de cet ensemble repose en partie sur une analyse épistémique et sur les résultats des travaux en didactique des mathématiques complétés éventuellement par des expérimentations spécifiques. La difficulté est de trouver un niveau de granularité pertinent pour les interprétations. En effet, plus il est fin plus il permet de mieux rendre compte le contexte mais il risque de ne pas mettre en évidence les régularités entre le contexte et les comportements des élèves. A contrario, s'il n'a pas beaucoup de traits les régulations constatées risquent de ne pas être discriminantes pour les élèves. Le niveau de granularité est déterminé par un aller-retour entre le modèle et les résultats des diagnostics.

Exemple 1

Par exemple, pour le mouvement, et plus précisément pour les deux types de tâches élémentaires $T_{\text{mvt-ad-eg}}$ et $T_{\text{mvt-mult-eg}}$ nous pouvons retenir comme variables du contexte : type de relation, position de l'argument à l'origine, signe de l'argument, nature de l'argument et position relative de l'argument par rapport à la relation. Les valeurs prises par ces variables du contexte sont :

Position de l'argument à l'origine (pour $T_{\text{mvt-mult-eg}}$)

PosOrgArgEstMult-Num : si la position d'origine de l'argument est multiplicative au numérateur.

PosOrgArgEstMult-Deno : si la position d'origine de l'argument est multiplicative au dénominateur.

Signe de l'argument

SigneArgEstPlus : si le signe syntaxique de l'argument est positif.

SigneArgEstMoins : si le signe syntaxique de l'argument est négatif.

Nature de l'argument

ArgEstEntier : si l'argument est un entier.

ArgEstFraction : si l'argument est sous une forme de fraction rationnelle

ArgEstDécimal : si l'argument est sous une forme d'une écriture décimale

ArgEstRadical : si l'argument contient un radical

Cet élément intervient dans le cas où l'argument est numérique.

Position de l'argument par rapport à la relation

PosOrgArgEstGauche : si la position d'origine de l'argument est à gauche de la relation.

PosOrgArgEstDroite : si la position d'origine de l'argument est à gauche de la relation.

Une étude spécifique doit valider ces variables de contexte. C'est-à-dire montrer qu'elles ont un impact sur le comportement des élèves.

Exemple 2

Un autre exemple issu de la thèse de Croset (Croset, 2009) concerne le type de tâches RedAdd, « somme de deux monômes » où elle a considéré cinq variables de contexte :

* Le degré de chaque monôme, qui peut prendre 5 valeurs : degré 0, degré 1, visibilité du degré 1, degré 2 ou supérieur à 2 strictement.

* Le signe de chaque coefficient, qui se décline en positif vs. négatif.

* La comparaison des deux coefficients en valeur absolue : soit le premier (celui qui est à gauche) est strictement plus grand que le second, strictement plus petit que le second, ou égal au second.

* La visibilité du coefficient 1 : si l'un des coefficients vaut 1 en valeur absolue, il peut être visible ou non.

* La présence d'un signe moins accolée au monôme de gauche dans l'expression mère.

Cette association nous permet de définir les types de tâches personnels[32] comme un vecteur composé du type de tâche T et de valeurs prises par des variables de contexte de G_T (Croset 2009, p. 191).

T_e=(T ; $v_1, v_2, \ldots, v_n$) où $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont les valeurs prises par les variables de contexte.

Pour l'exemple 1, un type de tâches personnel possible est :

T_e = ($T_{\text{mvt-ad-eg}}$, SigneArgEstPlus, ArgEstEntier, PosOrgArgEstGauche).

V.3. Mise en œuvre

Comme nous l'avons dit plus haut, pour déterminer les praxis personnelles élémentaires nous devrions chercher une corrélation entre le contexte et la règle diagnostiquée et plus précisément entre le type de tâches personnel et la technique personnelle.

Les types de tâches personnels possibles sont obtenus à partir des différentes valeurs des variables de contexte. Dans certains cas, le nombre de types de tâches personnels peut être élevé.

Par exemple, pour le type de tâches élémentaire $T_{\text{mvt-ad-eg}}$ on peut avoir 2x4x2 soit 16 possibilités. Mais dans certains cas, des valeurs des variables de contextes peuvent être incompatibles comme dans l'exemple cité ci-dessus concernant le type de tâche RedAdd, « somme de deux monômes » où nous avons une incompatibilité entre « les deux coefficients sont unitaires » et « les deux coefficients soit plus grand que l'autre, en valeur absolue ».

A chaque transformation-Anaïs (i.e. chaque pas élémentaire) on peut associer un type de tâches personnel T_e et une règle. Cette règle ne peut acquérir le statut de technique personnelle que si elle affiche une certaine stabilité. Reste à définir un seuil pour garantir cette stabilité et un mécanisme de mise en œuvre informatique. C'est ce que nous proposons d'illustrer à partir de la thèse Corset (Croset M. , 2009).

Etude de cas issu de la thèse de (Croset, 2009)

L'auteur a distingué deux sortes de stabilité : inter, au sein d'un groupe d'élèves, et intra, au sein d'un même élève. Elle donne la définition suivante (Croset, 2009, p. 181) :

32 Rappelons que c'est au sens de types de tâches en acte selon Croset (Croset, 2009)

Nous avons défini la technique-en-acte[33] comme étant une technique qui affiche une certaine stabilité. Cette stabilité peut être de deux types.

– Soit une même technique est utilisée plusieurs fois par un *groupe* d'individus et non pas nécessairement utilisée de manière régulière par un même élève ; dans ce cas, on parlera de **praxis-en-acte inter-élèves**. Il peut y avoir stabilité dans un groupe d'individus quand bien même chacun n'aurait pas une action stable, voire utiliserait une autre technique de manière stable. En revanche, tous les individus de ce groupe utilisent au moins une fois la technique considérée.

– Soit une même technique est fréquemment utilisée par un même individu ; dans ce cas, on parlera de **praxis-en-acte intra-élève**. Dans cette configuration, le sujet considéré est l'individu lui-même.

Dans la suite de ce paragraphe nous parlerons de « praxis » au sens de « praxis personnelle » ou « praxis-en-acte ».

Au niveau méthodologique l'auteur a procédé, dans un premier temps, à la détermination des praxis inter-élèves pour ensuite s'intéresser aux praxis intra-élève. Cette méthodologie repose sur l'hypothèse de travail selon laquelle les praxis inter sont des candidats potentiels pour d'éventuelles praxis intra. Bien entendu, il se peut qu'il y'ait des praxis intra sans qu'elles soient des praxis inter. Mais, l'auteur a fait le choix de ne diagnostiquer que les praxis intra qui ont une certaine représentativité inter. Ce choix a été fait pour être proche de la pratique du terrain : l'institution, et en particulier l'enseignant, réagit en terme de remédiation pour les erreurs qui apparaissent chez plusieurs élèves de la classe. A cela, il faut ajouter les difficultés d'accéder à une stabilité intra car elle nécessite de confronter chaque élève à plusieurs tâches qui relèvent d'un même type de tâches en variant toutes les valeurs des variables de contexte.

La stabilité inter a été résolue en construisant la bibliothèque de règles algébriques : n'ont été implémentées que les règles ayant montré une certaine stabilité inter. Ainsi les techniques-en-acte[34] inter sont potentiellement les règles algébriques erronées ou correctes de la base de règles. Cette bibliothèque de règles avait été construite à la suite d'un processus en spirale exploitant les résultats de la littérature sur ce domaine, les protocoles recueillis lors des expérimentations du projet « Cognitique » (Nicaud & al., 2005) et la construction d'un algorithme de diagnostic. L'auteur a ainsi implanté 153 règles algébriques correctes et erronées pour les domaines de développement, réduction et factorisation. Ces règles sont des candidates potentielles aux techniques-en-acte : elles ont toutes un coefficient d'utilisation[35] non nul sur l'ensemble des 60000 pas de calcul que le logiciel Anaïs permet d'analyser correctement.

A la suite de ce travail, l'auteur a construit des expérimentations spécifiques cherchant à valider deux hypothèses de recherche :

33 Rappelons que « en acte » dans (Croset, 2009) est au sens de « personnel » dans notre travail.

34 C'est au sens de technique personnelle dans notre recherche.

35 « Le coefficient d'utilisation d'une règle détaillée est la somme du nombre de fois ou` cette règle a été diagnostiquée pondérée par les probabilités d'utilisation de chaque diagnostic ou` la règle est apparue. » [Croset, 2009, p139].

- « Le découpage institutionnel en type de tâches ne correspond pas toujours à celui que l'élève perçoit. Autrement dit, il existe des types de tâches-en-acte distincts des types de tâches institutionnels » (Croset 2009, p 181)

- Les élèves maîtrisent moins bien les techniques certes attendues par l'institution mais non travaillées explicitement par celle-ci que les techniques travaillées explicitement par l'institution. C'est, en particulier, le cas des « itérations ou de combinaisons de techniques institutionnellement travaillées et maîtrisées par les élèves. Ce travail ne va pas de soi et demande un apprentissage spécifique ». (Croset 2009, p46)

A partir de ces expérimentations, les types de tâche-en-acte a priori ont été listés. En effet, à la différence de nos travaux, l'auteur n'a pu, pour des raisons informatiques, construire dynamiquement les types de tâches-en-acte en fonction du travail de l'élève. Elle a en fait listé a priori 34 types de tâches candidats potentiels à des types de tâches-en-acte : 13 en développement, 4 en factorisation et 17 en réduction.

A ces 34 TA, ont été associés des règles algébriques, produisant ainsi 97 candidats à des praxis-en-acte intra dont 68 erronées : 48 praxis-en-acte en développement, 11 en factorisation et 38 en réduction.

Partant de l'idée qu'un élève peut ne pas avoir un comportement parfaitement stable, que cet élève peut ne pas utiliser systématiquement toujours la même règle face pourtant à un même TA, et qu'il faut donc accepter un certain degré de défaillance, Croset fixe alors un critère de stabilité (et de tendance) pour chaque élève et pour chaque type de tâche-en-acte TA :

- compter combien de fois le sujet a été confronté à ce TA, soit m.
- fixer un seuil à partir duquel le nombre de TA est suffisant pour considérer avoir suffisamment d'informations pour modéliser, soit s. Ne pas poursuivre si $m < s$, poursuivre sinon.
- lister les règles, R_i, utilisées dans ce contexte et de compter leur occurrence : soit o_i.
- calculer les fréquences $f_i = \frac{o_i}{m}$.
- conserver la règle R_{i_0} qui a la fréquence la plus élevée, f_{i_0}.
- fixer un coefficient de stabilité c_s, au dessus duquel on considère que la fréquence f_{i_0} est suffisamment grande pour que l'utilisation de cette règle R_{i_0} soit considérée comme stable.
- fixer un coefficient de tendance c_t, au dessus duquel on considère que la fréquence f_{i_0} est suffisamment grande pour que l'utilisation de cette règle R_{i_0} soit considérée comme tendancielle.
- si $m \geq s$ et si $f_{i_0} > c_s$, nous pouvons considérer que face à ce type de tâche-en-acte, cet élève utilise de manière stable la règle R_{i_0}.
- si $m \geq s$ et si $c_t < f_{i_0} < c_s$, nous pouvons considérer que face à ce type de tâche-en-acte, cet élève a tendance à utiliser la règle R_{i_0}.

Figure 34 : critère de stabilité – extrait de la thèse de Croset

Les seuils c_s, c_t et m sont fixés respectivement dans son travail à 0.7, 0.5 et 3. Il faut donc que l'élève soit confronté au moins 3 fois à un même TA et qu'il utilise au moins 7/10 (resp. 5/10) de fois la même règle pour que l'auteur considère ce comportement comme stable (resp. tendanciel).

L'auteur lance alors le diagnostic sur le travail de plus de 80000 pas de calcul d'élèves. Il en ressort, entre autres, que, bien qu'une stabilité inter ait été diagnostiquée, la stabilité intra est loin d'être aussi fréquente : globalement ce sont donc les mêmes erreurs qui se retrouvent « de part le monde » mais un même élève ne refait pas si souvent cette même erreur : 37% des élèves faisant des erreurs face à un même TA auquel il est confronté plus de 3 fois, refait cette même erreur. Par exemple, face au TA « Factoriser *ka+k*, avec *k* ou *a* une somme », la moitié des élèves faisant des erreurs de factorisation ont un comportement instable : aucune règle erronée pouvant expliquer leur comportement n'est privilégiée. En revanche, dans l'ensemble des comportements stables, peu de règles expliquent à elles seules ces comportements. Pour reprendre le même exemple, face au TA « Factoriser $ka+k$, avec k ou a une somme », une seule et même règle erronée peut expliquer 20% des élèves faisant des erreurs de factorisation.

Enfin, après avoir répertorié et classé selon différents critères les praxis-en-acte diagnostiquées (Croset 2009, chapitre 6), Croset note que les 6 praxis-en-acte les plus diagnostiquées en inter sont celles qui le sont le plus aussi en intra. Au total, elle obtient 36 praxis-en-acte inter et 24 praxis-en-acte intra.

Cette étude de cas valide la mise en œuvre didactique et informatique de notre modèle praxéologique dans Anaïs qui à partir des traces brutes permet de déterminer les praxis personnelles élémentaires des élèves.

Précisons que dans notre recherche nous avons produit un diagnostic des connaissances des élèves à partir de n'importe quelle base d'exercices d'Aplusix. Cela a exigé la construction d'un modèle qui soit le plus générique possible. Cependant, pour obtenir un diagnostic pertinent au niveau didactique on peut faire travailler les élèves sur une base d'exercices la mieux adaptée qui prend en compte les différents contextes et qui permet de vérifier la stabilité dans les comportements des élèves. C'est ce que nous avons fait dans nos expérimentations dans le cadre du projet « cognitique » (Nicaud & al., 2005). Dans sa note de synthèse d'HDR Grugeon (Grugeon-Allys, 2008) montre la nécessité de faire évoluer son modèle de départ de diagnostic des compétences des élèves en algèbre, développé dans le cadre du projet lingot (Delozanne, Grugeon, & al., 2005), qui était basé sur une base d'exercice fixe construite par les chercheurs, vers une génération automatiques de tâches accessible à un diagnostic automatique. Pour cela, ils ont développé le logiciel PépiGen, générateur de classes d'exercices de diagnostic (Prévit, 2008).

D - RETOUR SUR LE MODELE PRAXEOLOGIQUE

Dans cette partie nous proposons de faire une synthèse de notre modèle présenté dans les parties B et C avec une proposition pour la construction des praxis personnelles. Nous l'organisons autour de 6 modules (paragraphes I à VI) avec une double préoccupation : présenter le modèle et une méthodologie de sa mise en œuvre. Les points importants de chaque module sont présentés dans un encadré. Nous avons voulu que cette présentation soit proche d'un cahier de charge pour une mise en œuvre didactique et une implémentation informatique. Notons que certains modules ne peuvent être réalisés que manuellement par nécessité méthodologique et d'autres peuvent être implémentés dans un EIAH.

Enfin, nous donnerons un exemple de mise œuvre manuelle du modèle (paragraphe VII).

I. CONSTRUCTION D'UNE ORGANISATION PRAXEOLOGIQUE MATHEMATIQUE DE REFERENCE (M1)

Dans la partie B, nous avons montré comment on peut construire[36] pour chaque type de tâches une organisation mathématique de référence et obtenir ainsi des cartes praxéologiques articulant plusieurs organisations mathématiques ponctuelles (simples ou complexes) et aussi les différents niveaux de détermination des OM. Cette étude se fait manuellement et constitue un résultat de recherche en soi.

On construit cette carte d'organisations mathématiques de référence en prenant en compte une institution qui soit la plus large possible, par exemple le collège ou l'enseignement secondaire. De plus, on introduit des OMP pouvant exister dans l'institution. A partir de cette carte on peut en extraire d'autres qui correspondent OM à enseigner à un niveau donné.

Les OMP sont renseignées par certaines informations comme : si elles sont enseignées ou non, si oui à quel(s) niveau(x), leurs raisons d'être (par rapport à d'autre OMP)… Ces renseignements nous permettent de construire des cartes praxéologiques pour un niveau scolaire donné ou étudier la dynamique de la mise en place des différentes praxéologies selon les niveaux scolaires.

Cette construction constitue une référence pour la modélisation des connaissances des élèves à l'aide des praxéologies.

Nous avons donc :

M1

* A chaque T est associé une organisation mathématique simple ou une organisation mathématique complexe : $OMPC(T)= [T ; \{OMP_k(T)\}_k ; \theta^T]$ où :

- $OMP_k(T) = (T_k, \tau_k, \theta_k, \Theta_k)$ dans le cas où $P_I(\tau/T)$ est caractérisée dans I. T_k est un sous-type de tâches de T.
- $OMP_k(T) = (T, \tau_k, \theta_k, \Theta_k)$ sinon.

* Chaque technique est décrite au niveau générique 0, c'est-à-dire comme une suite de type de tâches : $\tau=(T_i)_i$ où T_i est un type de tâches extrinsèque ou intrinsèque à la technique.

---

36 Nous avons illustré de façon détaillée la détermination de l'OM de référence sur l'exemple de la résolution des équations (partie B, paragraphe III.1.4)

A chaque T_i est associé une OMPC, donc une ou plusieurs techniques.

Dans le cas où tous les T_i ont une OM simple alors la technique τ est décrite au niveau générique 1 par $((T_i,\tau_i))_i$. Sinon, on associe à τ plusieurs descriptions à partir des différentes praxis.

* Chaque technique est décrite au niveau instancié 0 par $\tau=(t_i)_i$. Dans ce cas, on peut identifier les organisations ponctuelles qui peuvent être mobilisées pour chaque T_i. On peut donc décrire la technique par une succession de praxis. Chaque technique τ_i peut être décrite à son tour à l'aide des praxis jusqu'à un niveau qu'on considère comme élémentaire c'est-à-dire des praxis élémentaires. Les praxis intrinsèques sont considérées comme élémentaires.

* Le chercheur construit la liste des praxis élémentaires (T, τ).

II. CONSTRUCTION DES TECHNIQUES A PRIORI AU NIVEAU DE L'OM DE REFERENCE (M2)

A une tâche donnée dans une institution, il s'agit de construire a priori toutes les techniques possibles de l'OM de référence pouvant accomplir t.

M2

Soit t une tâche qui appartient à un type de tâches institutionnel T de l'OM de référence.

- Si T admet une organisation mathématique simple alors il existe une seule technique possible.

- Si T admet une organisation mathématique complexe, alors on cherche toutes les techniques τ_k pouvant accomplir t.

On obtient ainsi, les techniques de l'OM de référence pouvant accomplir t.

Cet ensemble sera noté : $\mathcal{TP}$

Ces techniques sont correctes mais ne sont pas toutes nécessairement attendues par I.

Remarque. L'ordre des T_i dans la description de la technique peut avoir ou non une importance.

III. CONSTRUCTION DES TECHNIQUES ATTENDUES PAR I (M3)

M3

Soit t une tâche et $C_I(t)$ son contexte institutionnel de prescription. t appartient à un type de tâches institutionnel T.

a) Si T admet une organisation mathématique ponctuelle simple alors il existe une seule technique possible qui est attendue par I.

b) Si T admet une organisation mathématique ponctuelle complexe, donc plusieurs techniques pouvant accomplir les tâches de T :

- b1) si t appartient à un sous-type de tâches T_k, alors la technique attendue est τ_k
- b2) sinon
    - b21) si $C_I(t)$ permet de choisir une ou plusieurs techniques, alors on obtient les techniques attendues

- b22) sinon, aucune technique n'est attendue a priori.

On obtient ainsi, les techniques de l'OM de référence pouvant accomplir t et attendue par I.

Cet ensemble sera noté : $\mathcal{TI}$

Exemple[37]. Soit t : « résoudre l'équation $(x+1)^2=4$ ».

t appartient au type de tâches $T_{ra\text{-}eq2}$ qui admet une organisation mathématique ponctuelle complexe $OMPC(T_{ra\text{-}eq2}) = [T_{ra\text{-}eq2} ; \{OMP_1(T_{ra\text{-}eq2}), OMP_2(T_{ra\text{-}eq2}), OMP_3(T_{ra\text{-}eq2}), OMP_4(T_{ra\text{-}eq2}), OMP_5(T_{ra\text{-}eq2}), OMP_6(T_{ra\text{-}eq2})\} ; \theta^T]$. (Module M1)

<u>Détermination de $\mathcal{TP}$ (Module M2)</u>

Pour t, on peut mettre en œuvre 3 techniques qui relèvent respectivement des 3 organisations mathématiques $OMP_3(T_{ra\text{-}eq2}), OMP_4(T_{ra\text{-}eq2}), OMP_6(T_{ra\text{-}eq2})$:

$\tau_{r\text{-}eq2.rac.c} = (T_{r\text{-}eq2.car}, T_{r\text{-}eq1})$

$\tau_{r\text{-}eq2.fact} = (T_{mvt\text{-}ad}, T_{fact}, T_{r\text{-}eq2.pn})$

$\tau_{ra\text{-}eq2.devdisc} = (T_{dev}, T_{mvt\text{-}ad}, T_{red}, T_{ra\text{-}eq.trin})$

$\mathcal{TP} = \{\tau_{r\text{-}eq2.rac.c}, \tau_{r\text{-}eq2.fact}, \tau_{ra\text{-}eq2.devdisc}\}$

<u>Détermination de $\mathcal{TI}$ (Module M3)</u>

Au niveau de l'institution I_s, enseignement secondaire français, la technique $\tau_{r\text{-}eq2.rac.c}$ n'est pas attendue et n'a pas beaucoup de chances d'être mise en œuvre par un élève car $OMP_3(T_{ra\text{-}eq2})$ ne fait pas partie du curriculum. La technique $\tau_{ra\text{-}eq2.devdisc}$ n'est pas attendue par I_s mais elle peut être mise en œuvre par les élèves. Enfin, la technique $\tau_{r\text{-}eq2.fact}$ est celle qui est attendue par l'institution I_s.

$\mathcal{TI} = \{\tau_{r\text{-}eq2.fact}\}$

IV. CONSTRUCTION DES TYPES DE TACHES PERSONNELS A PRIORI (M4)

Dans la partie C, nous avons introduit la notion de variables de contextes associées à un type de tâches institutionnel pour définir les types de tâches personnels. Cela nécessite les étapes suivantes.

M4

* A chaque type de tâches institutionnel T, on associe un ensemble de variables de contexte : G(T).

* A chaque type de tâches institutionnel T, On construit le vecteur $T_e = (T ; V_1, V_2, V_3\ldots)$ où les $V_i \in G(T)$. Un *type de tâches personnel* a priori est obtenu lorsque les variables V_i sont instanciées.

Certaines valeurs des variables sont incompatibles entre elles ce qui conduit à éliminer certaines combinaisons des valeurs des variables. On a autant de types de tâches personnels a priori que de combinaisons possibles[38] des valeurs des variables (cf. remarque 2 plus bas).

37 Le développement de cet exemple s'appuie sur l'étude faite dans la partie B, paragraphe III.

38 Sans les combinaisons où il y a incompatibilité entre des valeurs des variables.

Le choix des variables de contexte doit être fait de sorte qu'on puisse retrouver tous les sous types de tâches de l'OM de référence et d'autres types de tâches non institutionnels qui peuvent être des types de tâches personnels. D'où, il faut un bon choix de granularité.

* On fait la même chose pour les types de tâches intrinsèques : associer un ensemble de variables de contexte et construire les types de tâches personnels intrinsèques a priori.

* A chaque type de tâches élémentaire T on associe, par construction manuelle, des règles correctes ou erronées : R(T).

V. CONSTRUCTION DES PRAXIS PERSONNELLES ELEMENTAIRES (M5)

M5

Soit T un type de tâches institutionnel élémentaire. A ce type de tâches, on associe deux ensembles : G(T) et R(T).

Si une règle R_i de R(T) est mobilisée de façon stable par un élève e pour un type de tâches personnel a priori $T_{e,i}$ (M4), on dit que $\tau_{ei}=R_i$ est une *technique personnelle élémentaire*, $T_{e,i}$ un *type de tâches personnel élémentaire* et que le couple ($T_{e,i}$, τ_{ei}) est une *praxis personnelle élémentaire* de l'élève e.

Nous avons une construction analogue pour les types de tâches intrinsèques puisque nous les avons considérés comme élémentaires.

Nous avons montré dans la partie C (paragraphe V.3) la mise en œuvre de ce module en illustrant, à partir de la thèse de Croset (Croset M. , 2009) d'une part et de notre recherche dans le projet « Cognitique » (Nicaud & al., 2005), la question de la stabilité.

La stabilité est un critère important que le chercheur doit définir en prenant en compte des considérations d'ordre didactique et informatique.

Considérons la situation suivante :

Soit T un type de tâches institutionnel élémentaire qui admet comme technique élémentaire τ. Supposons qu'à T est associé deux variables de contextes V_1 et V_2 qui prennent respectivement les valeurs suivantes ($v_{1.1}$, $v_{1.2}$) et ($v_{2.1}$, $v_{2.2}$, $v_{2.3}$), et deux règles R_1 et R_2.

Supposons que le diagnostic a permis d'obtenir les résultats suivants selon des règles de stabilité :

	$v_{2.1}$	$v_{2.2}$	$v_{2.3}$
$v_{1.1}$	R_1	R_2	R_2
$v_{1.2}$	R_1	R_2	R_2

On peut dire que la variable V_1 n'est pas discriminante et seule la variable V_2 a une influence sur le comportement de l'élève.

Nous obtenons donc deux praxis personnelles élémentaires :

(T_1, τ_1) où T_1 = (T ; $v_{2.1}$) et $\tau_1 = R_1$.

(T_2, τ_2) où T_2 = (T ; $v_{2.2} + v_{2.3}$) et $\tau_2 = R_2$.

Bien entendu, on peut avoir des situations où nous avons des diagnostics partiels par exemple aucun diagnostic pour le couple ($v_{2.3}$, $v_{1.2}$). Dans ce cas peut-on conclure la variable V_1 n'est pas discriminante ?

VI. CONSTRUCTION DES PRAXIS PERSONNELLES (M6)

M6a. Description des techniques mises en œuvre par un élève e

Soit t une tâche proposée à un élève qui appartient à un type de tâches institutionnel T.

Soit τ_e la technique mise en œuvre par un élève e pour accomplir t. Elle peut être décrite au niveau 0 par une suite de types de tâches personnels a priori $(T_i)_i$ ou $(t_i)_i$.

M6b. Construction des praxis personnelles

Soit T un type de tâches institutionnel qui admet une organisation mathématique ponctuelle complexe. A ce type de tâche, on associe G(T), ensemble des variables de contexte, et donc un ensemble de types de tâches personnels a priori (M4).

Si l'élève mobilise de façon stable une technique τ_e pour un type de tâches personnel a priori $T_{e,}$, on dit que τ_e est une *technique personnelle*, $T_{e,}$ un *type de tâches personnel*, et que le couple ($T_{e,}$, τ_e) est une *praxis personnelle de l'élève e.*

Remarques.

1. La différence entre la praxis personnelle élémentaire et praxis personnelle est au niveau de la technique. Pour la première, la technique est réduite à une règle et pour la seconde la technique est une suite de types de tâches.
2. Si le nombre de types de tâches personnels a priori obtenus à partir des différentes valeurs des variables de contexte est important, ce qui peut être un obstacle pour obtenir des stabilités chez les élèves au niveau intra, alors on peut réduire ce nombre en ne retenant que les types de tâches personnels qui ont manifesté une stabilité inter au sens de Croset(Croset M. , 2009) (cf. partie C). On construit ainsi l'ensemble des types de tâches personnels a priori à partir des types de tâches de tâches personnels intra auxquels on ajoute les types de tâches de tâches personnels inter (pour prendre en compte les éventuels intra qui n'ont pas été diagnostiqués au niveau inter).
3. Les variables de contextes ne sont pas du même niveau de granularité pour les types de tâches institutionnels et les types de tâches institutionnels (cf. exemple ci-dessous).
4. Si le type de tâches personnel T_e est inclus dans un type de tâche T, alors on peut le considérer comme un sous-type de tâches personnel de T.
5. La détermination des techniques personnelles et des types de tâches personnelles se fait selon une certaine dualité.

VII. EXEMPLES DE MISE EN ŒUVRE

Dans ce paragraphe nous allons illustrer la mise en œuvre de notre modèle par deux exemples qui portent sur l'étude deux tâches t_1 et t_2 qui relèvent du même type de tâches institutionnel $T_{ra\text{-}eq2}$. Pour la première tâche, nous illustrerons la construction d'une praxis personnelle. Pour la deuxième tâche, nous étudierions plusieurs types de diagnostics à partir de six productions d'élèves.

Précisons que ce que nous présentons ci-dessous n'a pas fait l'objet d'une implémentation informatique mais il n'y a aucune contrainte informatique pour le réaliser. Nous voulons illustrer une mise en œuvre de notre modèle en présentant des ouvertures possibles sur des exploitations du diagnostic.

a) Analyse a priori des deux tâches

Cette analyse priori s'appuie sur trois modules : M1, M2 et M3.

Soient deux tâches qui relèvent du type de tâches institutionnel $T_{ra\text{-}eq2}$:

- t_1 « résoudre l'équation $(-2x+5)^2 = 0$ »
- t_2 « résoudre l'équation $(3-x)(x+2)+x+2=0$

Le type de tâches institutionnel $T_{ra\text{-}eq2}$ a été étudié dans la partie B (paragraphe III). Il s'agit du module M1.

$T_{ra\text{-}eq2}$ admet une organisation mathématique ponctuelle complexe (déterminée dans le paragraphe III.1.4.d) : $OMPC(T_{ra\text{-}eq2}) = [T_{ra\text{-}eq2} ; \{OMP_1(T_{ra\text{-}eq2}), OMP_2(T_{ra\text{-}eq2}), OMP_3(T_{ra\text{-}eq2}), OMP_4(T_{ra\text{-}eq2}), OMP_5(T_{ra\text{-}eq2}), OMP_6(T_{ra\text{-}eq2})\} ; \theta^T]$

<u>**Détermination de $\mathcal{TP}$ (Module M2)**</u>

<u>*Cas de t_1*</u>

Pour t_1, on peut mettre en œuvre deux techniques qui relèvent respectivement de deux organisations mathématiques ponctuelles $OMP_1(T_{ra\text{-}eq2})$ $OMP_3(T_{ra\text{-}eq2})$ et $OMP_6(T_{ra\text{-}eq2})$:

$\tau_{r\text{-}eq2.pn} = (T_{pn} ; T_{r\text{-}eq1})$

$\tau_{r\text{-}eq2.rac.c} = (T_{r\text{-}eq2.car}, T_{r\text{-}eq1})$

$\tau_{ra\text{-}eq2.devdisc} = (T_{dev}, T_{red}, T_{ra\text{-}eq.trin})$

$\mathcal{TP}(t_1) = \{\tau_{r\text{-}eq2.pn}, \tau_{r\text{-}eq2.rac.c}, \tau_{ra\text{-}eq2.devdisc}\}$

<u>*Cas de t_2*</u>

Pour t_2, on peut mettre en œuvre deux techniques qui relèvent respectivement de deux organisations mathématiques ponctuelles $OMP_4(T_{ra\text{-}eq2})$ et $OMP_6(T_{ra\text{-}eq2})$:

$\tau_{r\text{-}eq2.fact} = (T_{fact}, T_{r\text{-}eq2.pn})$

$\tau_{ra\text{-}eq2.devdisc} = (T_{dev}, T_{red}, T_{ra\text{-}eq.trin})$

$\mathcal{TP}(t_2) = \{\tau_{r\text{-}eq2.fact}, \tau_{ra\text{-}eq2.devdisc}\}$

<u>**Détermination de $\mathcal{TI}$ (Module M3)**</u>

<u>*Cas de t_1*</u>

Les deux techniques $\tau_{r\text{-}eq2.rac.c}$, $\tau_{ra\text{-}eq2.devdisc}$ ne sont pas attendues par I_s mais elles peuvent être mise en œuvre par les élèves. En revanche, la technique $\tau_{r\text{-}eq2.pn}$ est celle qui est attendue par l'institution I_s. Nous sommes dans le cas b1 du module M3 (partie D, paragraphe III).

$\mathcal{TI}(t_1) = \{\tau_{r\text{-}eq2.pn}\}$

<u>*Cas de t_2*</u>

La technique $\tau_{ra\text{-}eq2.devdisc}$ n'est pas attendue par I_s mais elle peut être mise en œuvre par les élèves. En revanche, la technique $\tau_{r\text{-}eq2.fact}$ est celle qui est attendue par l'institution I_s. Nous sommes dans le cas b1 du module M3 (partie D, paragraphe III).

$\mathcal{TI}\,(t_2) = \{\tau_{r\text{-}eq2.fact}\}$

b) Analyse d'une production d'élève relative à t_1

Considérons une production d'élève pris dans la thèse de Nguyen (Nguyen, 2006) :

$(-2x+5)^2 = 0$

$4x^2 - 20x + 25 = 0$

$4x(x - 5) = -25$

$x-5 = -25$ ou $4x = -25$

$x = -25 + 5$ ou $x = -25/4$

Ici, l'élève a développé, puis il a isolé les termes en x à gauche (à l'image de ce qu'on fait dans les équations de degré 1), puis il factorise le membre de gauche pour se ramener à l'équation $P_1(x)\,Q_1(x)=k$.

Nous allons illustrer sur cet exemple mécanisme qui permettrait de construire une praxis personnelle[39].

<u>*Types de tâches personnels a priori (M4 et M5)*</u>

Au type de tâches $T_{ra\text{-}eq2}$ on associe des variables de contexte. Rappelons que le choix des variables de contexte doit être fait de sorte qu'on puisse retrouver tous les sous types de tâches de l'OM de référence et d'autres types de tâches non institutionnels qui peuvent être des types de tâches personnels. A cela il faut ajouter les éventuels types de tâches intrinsèques qui sont directement liés au type de tâche $T_{ra\text{-}eq2}$. Dans notre cas, il s'agit de T_{pn}[40].

Pour ne pas alourdir notre illustration on va considérer le même ensemble de variables de contexte simple pour le type de tâches $T_{ra\text{-}eq2}$ et le type de tâches intrinsèque T_p « appliquer la règle du produit »[41]. Les variables de contextes sont :

V_1 : membre de gauche est une

- $v_{1.1}$ = somme
- $v_{1.2}$ = produit de facteurs

V_2 : second membre est :

- $v_{2.1}$ = nul
- $v_{2.2}$ = constante non nulle
- $v_{2.3}$ = polynôme

On a donc $G(T_p) = G(T_{ra\text{-}eq2}) = \{V_1 ; V_2\}$.

* Les types de tâches personnels intrinsèques a priori (relatifs au type de tâches T_p) sont définis par le vecteur :

39 Il serait intéressant de reprendre l'étude faite par Nguyen avec notre modèle.

40 Cf. partie B, paragraphe III.1.4.d)i)

41 Il est évident que nous devions avoir plus de variables de contexte pour $T_{ra\text{-}eq2}$ que T_p pour prendre en compte le degré des polynômes qui interviennent par exemple.

$T_e= (T_p ; V_1, V_2)$. Ce qui donne 6 types de tâches personnels intrinsèques a priori.

Par exemple : $(T_p ; v_{1.2}, v_{2.1})$ correspond au type de tâches intrinsèque de l'OM de référence T_{pn}.

* Les types de tâches personnels a priori (relatifs au type de tâches $T_{ra\text{-}eq2}$) sont définis par le vecteur :

$T_e= (T_{ra\text{-}eq2} ; V_1, V_2)$. Ce qui donne 6 types de tâches personnels a priori.

Par exemple : $(T_{ra\text{-}eq2} ; v_{1.2}, v_{2.1})$ correspond au sous-type de tâches de l'OM de référence $T_{ra\text{-}eq2.pn}$.

Construction des règles (M4)

A ce type de tâches intrinsèque T_p : « appliquer la règle du produit » on associe un ensemble de règles $R(T_p)$. Nous proposons certaines sans chercher d'exhaustivité :

- τ_{pk} : si AB=k alors A=k ou B=k où A et B peuvent être des nombres ou des polynômes et k un réel non noul.
- τ_{pn} : si AB=0 alors A=0 ou B=0 où A et B peuvent être des nombres ou des polynômes.
- τ'_{pn} : si AB=0 alors A=0 et B=0 où A et B peuvent être des nombres ou des polynômes.
- τ_{pk} : si AB=k alors A=k et B=1 où A et B peuvent être des nombres ou des polynômes et k un réel.
- ...

Construction des praxis personnelles élémentaires (M5)

Supposons que pour cet élève on a pu diagnostiqué par ailleurs, qu'il mobilise la règle τ_{pk} de façon stable sur un type de tâches personnel élémentaire[42] a priori $T_{pk} = (T_p ; v_{1.2}, v_{2.2})$.

Alors, on peut dire que τ_{pk} est une technique personnelle élémentaire, T_{pk} un type de tâches personnel élémentaire et que le couple (T_{pk}, τ_{pk}) est une *praxis personnelle élémentaire* de l'élève e.

Construction des praxis personnelle (M6)

La technique mise en œuvre par l'élève pour résoudre l'équation « $4x(x – 5) = - 25$ » peut être décrite dans notre modèle comme suit[43] $\tau_{ra\text{-}eq2.pk} = (T_{pk} ; T_{r\text{-}eq1})$ où

T_{pk} : appliquer la règle : un produit de facteur égal à une constante si et seulement si l'un des facteurs est égal à une constante. C'est un type de tâches intrinsèque.

La technique τ_{pk} est : si AB=k alors A=k ou B=k.

$T_{r\text{-}eq1}$: résoudre deux équations de degré 1.

Ensuite, on étudie la mise en œuvre de cette technique sur les types de tâches personnels $T_e= (T_{ra\text{-}eq2} ; V_1, V_2)$.

42 Ici, il est intrinsèque

43 C'est notre description et non celle de l'auteur. Ce que nous proposons dans cette exemple est une relecture du travail de l'auteur dans notre modèle.

Supposons que le diagnostic montre que l'élève mobilise de façon stable $\tau_{ra\text{-}eq2.pk}$ sur un type de taches personnel a priori ($T_{ra\text{-}eq2}$; $v_{1.2}$, $v_{2.2}$) qu'on notera $T_{ra\text{-}eq2.pk}$, alors on peut dire que :

$\tau_{ra\text{-}eq2.pk}$ est une technique personnelle, $T_{ra\text{-}eq2.pk}$ un type de tâches personnel et que le couple ($T_{ra\text{-}eq2.pk}$, $\tau_{ra\text{-}eq2.pk}$) est une *praxis personnelle* de l'élève e.

D'ailleurs, dans son travail de thèse, Nguyen (Nguyen, Les apports d'une analyse didactique comparative de la résolution des équations du second degré dans l'enseignement secondaire au Vietnam et en France., 2006) a mis en évidence la stabilité de la technique $\tau_{ra\text{-}eq2.pk}$ pour les tâches qui sont sous la forme $P_1(x)$ $Q_1(x)$=k, où $P_1(x)$ et $Q_1(x)$ sont des polynômes de degré 1 et k une constante c'est-à-dire : $T_{ra\text{-}eq2.pk}$= ($T_{ra\text{-}eq2}$; $v_{1.2}$, $v_{2.2}$).

c) Analyse des productions d'élèves relatives à t_2

Dans cet exemple, nous illustrons une mise en œuvre manuelle du modèle décrit ci-dessus.

Soit la tâche t : « résoudre l'équation $(3-x)(x+2)+x+2=0$ » une tâche proposée à des élèves de Seconde.

II) Analyse de 6 productions d'élèves

Considérons 6 réponses d'élèves présentées dans (Figure 35 et Figure 36) à la tâche t_2.

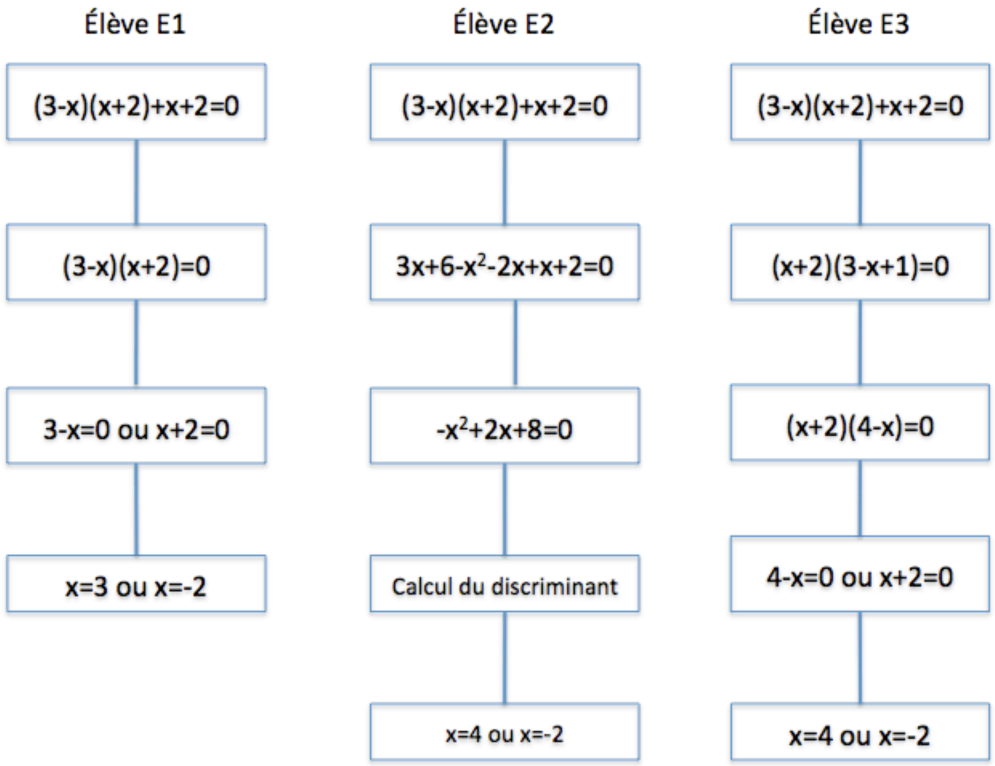


Figure 35 : réponses d'élèves à une même tâche

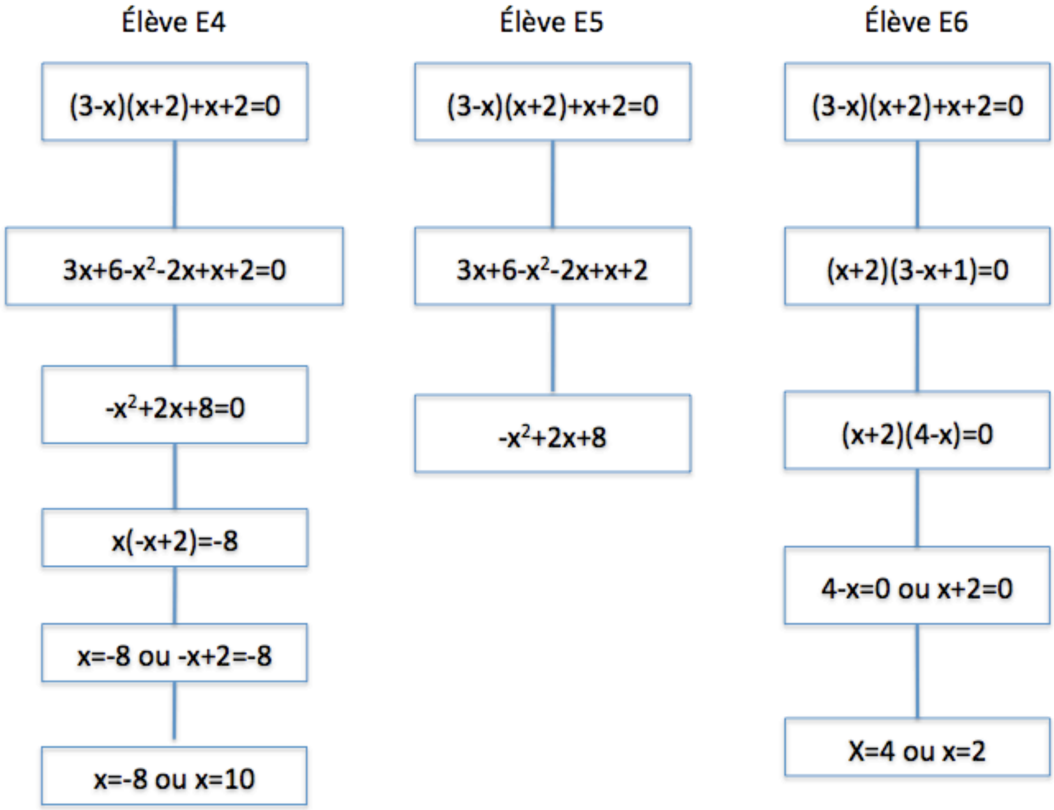


Figure 36 : réponses d'élèves à une même tâche

II.1) Description et évaluation des techniques mises en œuvres par les élèves

Un premier niveau de diagnostic consiste à décrire les techniques mises en œuvre par les élèves et à faire une première évaluation. Cette évaluation consiste à situer la technique mise en œuvre par l'élève par rapport aux techniques correctes de l'OM de référence $\mathcal{TP}(t_2)$ et par rapport aux techniques attendue par l'institution $\mathcal{TI}(t_2)$.

Nous présentons ce premier niveau de diagnostic sous forme de tableau :

Elève	**Description de la technique au niveau générique 0**	**Evaluation**
E1	$\tau_{e1} = \tau_{r\text{-}eq2.fact} = (T_{fact}, T_{r\text{-}eq2.pn})$ Il factorise puis résout une équation produit-nul	Attendue : Oui Correcte (niv 0) : Oui Correcte (ts niv) : Non
E2	$\tau_{e2} = \tau_{ra\text{-}eq2.devdisc} = (T_{dev}, T_{red}, \mathcal{T}_{ra\text{-}eq.trin})$ Il développe, réduit puis résout une équation trinôme à l'aide du discriminant.	Attendue : Non Correcte (niv 0) : Oui Correcte (ts niv) : Oui
E3	$\tau_{e3} = \tau_{r\text{-}eq2.fact} = (T_{fact}, T_{r\text{-}eq2.pn})$ Il factorise puis résout une équation produit-nul	Attendue : Oui Correcte (niv 0) : Oui Correcte (ts niv) : Oui
E4	$\tau_{e4} = (T_{dev}, T_{red}, \mathcal{T}_{mvt\text{-}ad}, T_{r\text{-}eq2.pk})$	Attendue : Non

	où $T_{r\text{-}eq2.pk}$ correspond à un type de tâches personnel : « résoudre l'équation $P_1(x)\ P_2(x)=k$ »	Correcte (niv 0) : Non Correcte (ts niv) : Non
E5	$\tau_{e5} = (T_{dev})$	Attendue : Non Correcte (niv 0) : Non Correcte (ts niv) : Non
E6	$\tau_{e6} = \tau_{r\text{-}eq2.fact} = (T_{fact}, T_{r\text{-}eq2.pn})$	Attendue : Oui Correcte (niv 0) : Oui Correcte (ts niv) : Non

Tableau 4 : Diagnostic des praxis personnelles au niveau 0

Ce premier niveau de diagnostic nous permet de regrouper les élèves selon le statut de leur technique personnelle. Pour certains élèves, il faut poursuivre diagnostic à un autre niveau de la description de la technique. Nous obtenons donc :

Cas où l'évaluation de la technique est (Oui, Oui, Oui) :

C'est le cas de l'élève E_3. Il s'agit d'un élève qui a manifesté un rapport conforme au rapport institutionnel.

*Sorti*es : Technique correcte. Le rapport personnel de l'élève est conforme au rapport institutionnel au type de tâches $T_{ra\text{-}eq2}$.

Cas où l'évaluation de la technique est (Oui, Oui, Non) :

C'est le cas des élèves E_1 et E_6. Il s'agit d'élèves qui au niveau du type de tâches $T_{ra\text{-}eq2}$ ont mobilisé la technique attendue mais sa mise en œuvre contient des erreurs.

*Sorti*es : Résolution incorrecte. Le rapport personnel est conforme au rapport institutionnel au type de tâches $T_{ra\text{-}eq2}$. Un diagnostic au niveau 1 de la description de la technique (c'est-à-dire au niveau des praxis mobilisées dans la technique) nous permet de situer les erreurs des élèves, ainsi :

- Pour E_1 : la technique mise en œuvre dans la factorisation n'est pas correcte.
- Pour E_6 : la technique mise en œuvre dans la résolution de l'équation de degré 1 n'est pas correcte.

Cas où l'évaluation de la technique est (Non, Oui, Oui) :

C'est le cas de l'élève E_2. Il s'agit d'un élève qui n'a pas mobilisée la technique attendue mais sa technique est correcte.

*Sorti*es : Technique correcte. Le rapport personnel n'est pas conforme au rapport institutionnel au type de tâches $T_{ra\text{-}eq2}$.

Cas où l'évaluation de la technique est (Non, Non, Non) :

C'est le cas des élèves E_4 et E_5. Mais ces deux élèves doivent être distingués. En effet, l'élève E_5 a changé le type de tâche et a traité l'exercice comme un exercice de développement. Alors que l'élève E_4 a mis en œuvre dans sa technique un type de tâches personnel possible non valides (ici $T_{r\text{-}eq2.pnk}$).

*Sorti*es :

- Pour E_4 : la technique n'est pas correcte. Changement de type de tâches au niveau de la résolution.
- Pour E_5 : la technique utilise un type de tâche personnel possible non valide ($T_{r\text{-}eq2.pnk}$).

Les informations obtenues à partir du diagnostic sont données sans critère de stabilité. Nous le considérons comme un diagnostic local dans la mesure où il ne prend pas en compte l'histoire de l'élève[44], et il est relatif à une tâche donnée. Cependant, ce diagnostic local peut être enrichi à partir de l'histoire de l'élève. Par exemple, si on avait l'information[45] que $T_{r\text{-}eq2.pnk}$ est un type de tâches personnel de l'élève E_5, alors la sortie du diagnostic de cet élève serait « la technique utilise un type de tâche personnel[46] non valide ($T_{r\text{-}eq2.pnk}$). »

Notre idée est de construire dynamiquement un diagnostic global relatif à un type de tâches T pour un élève donné e à partir des diagnostics locaux relatifs aux différentes tâches t de T. Cela soulève de nouvelles questions sur ce diagnostic global. Par exemple, comment considérer la stabilité du comportement de l'élève dans le temps puisque celle-ci peut évoluer ? Autrement dit, faut-il repérer des stabilités relatives dans le temps ? Ce choix est-il pertinent au niveau didactique ?… Voilà un exemple de nos perspectives de recherche.

---

44 Signifie tout ce qu'on sait sur l'élève à partir de l'ensemble des diagnostics.

45 Etablit selon des critères de stabilité.

46 Cette fois-ci, il ne s'agit pas d'un type de tâches *possible*.

E – CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Nous avons présenté une synthèse de nos travaux de recherche sur l'axe 1, celui de la modélisation didactique et informatique des connaissances des élèves et nous avons expliqué à travers la dynamique de notre recherche, depuis notre doctorat, l'élaboration de notre modèle basé sur la praxéologie.

Dans la partie D, nous avons présenté le modèle sous forme de six modules. Certains modules ne peuvent être mis en œuvre que manuellement comme le module « construction d'une organisation mathématique de référence ». D'autres peuvent être mis en œuvre automatiquement comme le module « construction des praxis élémentaires », qui d'ailleurs a été implémenté dans le cadre du projet Aplusix, ou comme le module « construction des praxis personnelles » qui n'a pas été implémenté et qui fait partie de notre prochaine étape de recherche.

Pour chaque module, nous avons précisé ses fondements didactiques et la méthodologie[47] pour sa mise en œuvre. Nous considérons la partie D comme une synthèse de notre modèle didactique et un cahier de charge pour son implémentation informatique.

Deux grandes questions se posent à propos de notre modèle :

Q1) Peut-il être utilisé dans d'autres domaines de mathématiques autres que l'algèbre ? Dans d'autres disciplines ?

Q2) Permet-il d'aborder des problématiques autres que la modélisation des connaissances ?

Ces deux questions ouvrent de nouvelles perspectives de recherches que nous présenterons ci-dessous.

Pour le domaine de connaissances, nous souhaitons mettre en œuvre ce modèle dans d'autres domaines mathématiques, comme la géométrie ou l'analyse, mais aussi dans d'autres disciplines compte tenu de la spécificité de notre équipe de recherche qui regroupe des chercheurs en informatique et en didactique des sciences.

Notre recherche porte sur la construction d'un module de l'apprenant[48] constitué de trois composantes : des données d'entrée, un diagnostic et des sorties. Nous avons montré la pertinence du modèle praxéologique pour la modélisation des connaissances des élèves dans un EIAH et en particulier pour la fonction diagnostic. Ce modèle, permet d'avoir différents niveaux de diagnostic et peut donc nous fournir des informations pertinentes au niveau didactique. C'est cette dimension que nous souhaitons poursuivre : exploiter le diagnostic pour construire des parcours d'apprentissage adaptés à chaque élève, fournir à un enseignant

47 Les aspects méthodologiques ont été largement présentés et illustrés dans les parties B et C.

48 cf. Partie C

ou à un tuteur intelligent un bilan sur les élèves pour l'aider aux prises de décisions didactiques…

Dans la partie B, nous avons présenté le processus de construction de cartes praxéologiques : à chaque type de tâches, on associe une organisation mathématique de référence et une carte praxéologique. Cette dernière permet de mieux rendre compte des différentes organisations praxéologiques de l'OM de référence en les situant les unes par rapport aux autres. Notre travail s'est porté sur une seule carte praxéologique[49]. Nous pensons que l'intérêt de ces cartes est de les relier entre elles en exprimant les OM qui interviennent[50] dans les techniques associées à des types de tâches. Par exemple, on a vu que l'OM de type de tâches « factoriser une expression algébrique » intervient dans certaines techniques de type de tâches $T_{ra\text{-}eq2}$. Cette mise en relation entre les cartes fournit un outil pour d'autres problématiques de recherches en EIAH. Par exemple, la conception de ressources, la caractérisation des énoncés, le suivi de l'apprenant…

Pour développer ces différentes perspectives, et en particulier la conception et l'utilisation des ressources, nous proposons d'intégrer à notre modèle d'autres concepts de la Théorie Anthropologique du Didactique comme les organisations didactiques et de nous appuyer sur les développements récents de cette théorie autour des Activités d'Etude et de Recherche (AER) et Parcours d'Etude et de Recherche (PER).

49 associée au type de tâches « résoudre une équation »

50 Castella (Castela, 2008) propose 9 niveaux d'interventions d'une OM dans la technique d'une tâche prescrite à un élève.

BIBLIOGRAPHIE

Anderson, J. (1983). *The Architecture of Cognition.* Harward University Press.

Anderson, J., Boyle, C. F., Corbett, A., & Lewis, M. (1990). Cognitive Modeling and Intelligent Tutoring. *Artificial Intelligence , 42(1).*

Arslan, S. (2005). *Apprentissage et enseignement des équations différentielles à l'aide des environnements informatiques. Thèse.* Grenoble: Université Joseph Fourier.

Arslan, S., Chaachoua, H., & Laborde, C. (2004). Reflexions on the teaching of differential equations : what effects of a teaching to algebraic dominance?, . *Actes ICME 10.* Copenhagen, Danemark.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques , 10(2-3)*, 241–286.

Assude, T. (1992). *Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique, écologie de l'objet "racine carré" et analyse du curriculum.* Grenoble: Université Joseph Fourier.

Balacheff, N. (2003). cK¢, a knowledge model drawn from an understanding of students understanding. Didactical principles and model specifications. Baghera assessment project, designing an hybrid and emergent educational society. (S. Soury-Lavergne, Ed.) *Cahier Leibniz , 81*, 3-22.

Balacheff, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en didactiques des mathématiques , 14 (1/2)* , pp. 9-42.

Beeson, M. (1998). Design Principles of Mathpert: Software to support education in algebra and calculus. In Kajler, *Computer-Human Interaction in Symbolic Computation* (pp. 89-115). New York, USA: Springer-Verlag.

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensives. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques , 19(1)*, pp. 77–124.

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques , 19*, pp. 77-124.

Bosch, M., & Gascon, J. (2004). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 1-15). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bouhineau, D., Chaachoua, H., & Nicaud, J. (2008). Helping Teachers Generate Exercises with Random Coefficients. *International Journal of Continuing Engineering Education and Life-Long Learning (IJCEELL)* .

Bronner, A. (1997). *Etude didactique des nombres réels. Idécimalité et racine carrée. Thèse.* Grenoble: Université Joseph Fourier .

Buchanan, B., & Shortliffe, E. (1984). *Rule-Based Expert Systems, The Mycin experiments of the Stanford Heuristic Programming Project.* Addison-Wesley Publishing.

Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignor´es par les institutions d'enseignement. *Recherche en Didactique des Mathématiques , 28 (2)*, pp. 135-182.

Chaachoua, H. (1997). *Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Étude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes. Thèse.* Grenoble: Université Joseph Fourier .

Chaachoua, H., & Saglam, A. (2005). Modelling by differential equations. *Teaching Mathematics and its Applications. , 25(1)*, pp. 15-22.

Chaachoua, H., & Saglam, A. (2004). Modelling by differential equations. *Actes ICME 10* . Copenhagen, Danemark.

Chaachoua, H., Bittar, M., & Nicaud, J. (2006). Student's modelling with a lattice of conceptions in the domain of linear equations and inequations. *In Actes PME30.* Prague.

Chaachoua, H., Croset, M., Bouhineau, D., Bittar, M., & Nicaud, J. (2007). Description et exploitations des traces du logiciel d'algèbre Aplusix. . *Revue Sciences et Techniques de l'Information et de la Communication pour l'Éducation et la Formation, revue Sticef , 14*.

Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In S. Maury, & M. Caillot, *Rapport au savoir et didactiques* (pp. 81-104,). Paris: Fabert.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques , 12/1*, 73 - 112.

Chevallard, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Séminaire de didactique des Mathématiques et de l'informatique* , pp. 211-235.

Chevallard, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Séminaire de didactique des Mathématiques et de l'informatique* , pp. 226-227.

Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège- première partie : l'évolution de transposition didactique. *Petit x , 5*, 51-94.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège, 2eme partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *PetitX , 19*, pp. 45-75.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège-troisième partie . *Petit x , 23*, 5-38.

Chevallard, Y. (1999a). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *19 (2)*, 221-266.

Chevallard, Y. (2001). Organiser l'étude 1. Structures et Fonctions. In J-L. Dorier & al. (eds) Actes de la 11ième Ecole d'été de didactique des mathématiques -Corps- 21-30 Août 2001. *Recherches en Didactique des Mathématiques* , pp. 3-22.

Chevallard, Y. (1999b). Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques , 19/1*, 79 – 119.

Cirade, G., & Matheron, Y. (1998). Equations du premier degré et modélisation algébrique. *Actes de l'université d'été de la Rochelle : Analyse des pratiques enseignantes et didactque des mathématiques.* IREM de Clermont-Ferrand.

Coppé, S. (1998). Composantes privées et publiques du travail de l'élève en situation de devoir surveillé en mathématiques. *Educational studies in mathematics. , 35(2)*, 129-151.

Croset, M. (2009). *Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre. Etude des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte.* grenoble: Thèse d'université. Univ.

Croset, M., & Chaachoua, H. (2010). Modélisation des connaissances des élèves en termes de Praxis-en-Acte. *Actes du 3e congrès pour la Théorie Anthrophogique du didactique.* Sant Hilari Sacalm, Espagne.

De Vicente, A., & Pain, H. (1998). Motivation Diagnosis in Intelligent Tutoring Systems. *Proceedings of the 4th International Conference, ITS '98, LNCS 1452.* San Antonio, Texas, USA.

Delozanne, É., Grugeon, B., & al. (2005). Projet de recherche « Modélisation et mise en oeuvre d'environnements informatiques pour la régulation de l'apprentissage, le cas de l'algèbre avec le projet LINGOT ». *Rapport de recherche, Programme « Ecole et Sciences Cognitives : les apprentissages et leur dysfonctionnement » du MR* .

Dershowitz, N., & Jouannaud, J. (1989). Rewrite Systems. In *Handbook of Theoretical Computer Science* (Vols. B, Chap 15). North-Holland.

Dhieb, M. (2009). *Contribution à l'introduction des probabilités au collège : rapports d'élèves à quelques notions probabilistes. Thèse.* Université de Tunis et Université Paris Descartes.

Doan Huu, H. (2001). *L'enseignement de la géométrie dans l'espace au début du lycée dans ses liens avec la géométrie plane. Thèse.* Grenoble: Université Joseph Fourier.

Duval, R. (1994). Les différentes fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères , 17*, pp. 121-138. .

Duval, R. (1988). Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de didactique et de sciences cognitives , 1*, pp. 57-74.

Gascon, J. (1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'arithmétique généralisée ». . *Petit x , 37*.

Grugeon, B. (1995). *Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à lalgèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G. Thèse.* Paris: IREM Paris VII.

Grugeon-Allys, B. (2008). *Quelques apports de l'analyse multidimensionnelle : activités des élèves et pratiques des professeurs de mathématiques ; vers une modélisation. Note de synthèse pour une HDR.* Université de Picardie Jules Verne.

Mille, A. (2007). Traces, traces d'interactions, traces d'apprentissage : définitions, modèles informatiques, structurations, traitements et usages. . *In Communication présentée à la 5 ème école thématique du CNRS sur les EIAH - Personnalisation des EIAH.* Saint Quentin sur Isère.

Nguyen, A. (2006). *Les apports d'une analyse didactique comparative de la résolution des équations du second degré dans l'enseignement secondaire au Vietnam et en France.* Thèse de Doctorat. Grenoble : Université Joseph Fourier.

Nguyen, A., Chaachoua, H., & Comiti, C. (2007). De l'usage de la TAD pour l'analyse des erreurs. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Garcia (Ed.), *Sociedad, Escuela y matematicas. Aportaciones de la teoria Antropologica de lo Didactico* (pp. 621-640). Universidad de Jaen.

Nicaud, J., & al. (2005). *Modélisation cognitive d'élèves en algèbre et construction de stratégies d'enseignement dans un contexte technologique*. From http://www-leibniz.imag.fr/leibniz/index.php?varmenu=Extra&dir=LesCahiers/2005/Cahier123&varmain=ResumCahier123

Nicaud, J., Bittar, M., Chaachoua, H., Inamdar, P., & Maffei, L. (2006). Experiments of Aplusix in four countries. In International Journal for Technology. *Mathematics Education , 13(2).*

Nicaud, J., Bouhineau, D., & Chaachoua, H. (2004). Mixing microworld and CAS features in building computer systems that help students learn algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning , 9(2).*

Nicaud, J., Chaachoua, H., & Bittar, M. (2006). Automatic Calculation of Students' Conceptions in Elementary Algebra from Aplusix Log Files. In *Intelligent Tutoring Systems* (pp. 433-442). Springer Berlin/Heidelberg Editeur.

Pearl, J. (1984). *Heuristics.* London: Addison-Wesley.

Prank, R., Issakova, M., Lepp, D., & Vaiksaar, V. (2006). *Using Action-Object-Input Scheme for Better Error Diagnosis and Assessment in Expression Manipulation Tasks. Maths, Stats and OR Network, Maths CAA Series.* From http://mathstore.ac.uk/articles/maths-caa-series/mar2006/

Prévit, D. (2008). *Génération d'exercices et analyse multicritère automatique de réponses ouvertes. Thèse.* Paris: Université Pierre et Marie Curie.

Ravel, L. (2003). *Des programmes à la classe : étude de la transposition didactique interne. Exemple de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématique* . Grenoble: Université Joseph Fourier.

Saglam, A. (2004). *Comment l'apprentissage des équations différentielles et l'utilisation de divers registres sémiotiques permet aux étudiants du DEUG d'organiser des savoirs du circuit électrique. Thèse.* Grenoble: Université Joseph Fourier .

Saglam, A. (2004). *Les Équations Différentielles en Mathématiques et en Physique. Étude des conditions de leur enseignement et caractérisation des rapports personnels des étudiants de première année d'université à cet objet de savoir. Thèse.* Grenoble: Université Joseph Fourier.

Saglam, A., Chaachoua, A., & Lacroix, D. (2004). L'objet équations différentielles en mathématiques et en physique : de la naissance à nos jours. *Actes du colloque EMF 2003.* Tunis.

Self, J. (1999). The defining characteristics of intelligent tutoring systems research: itss care, precisely. *International Journal of Artificial Intelligence in Education , 10*, 350-364.

Tran Luong, C. (2006). *La notion d'intégrale dans l'enseignement des mathématiques au lycée : une étude comparative entre la France et le Vietnam. Thèse.* Grenoble: Université Joseph Fourier.

Vergnaud, G. (1989). Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques. In N. Bednarz, & C. Garnier (Ed.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits.* CIRADE.

Vergnaud, G. (2001). Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. *Actes du Colloque GDM - La notion de compétence en enseignement des mathématiques,* *aAnalyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation.* . Jean Portugais (Ed) .

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques , 10(2/3)*, pp. 133-169.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. In C. Laborde (Ed.), *Actes du colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique.* . Grenoble: La Pensée Sauvage.

Wenger, E. (1987). *Artificial intelligence and tutoring systems.* Morgani Kaufman Publishers.

ANNEXES

ANNEXE 1 : ORGANISATIONS MATHEMATIQUES A ENSEIGNER DANS LES MANUELS DE SECONDE

Manuels	**Définition**	**Types de tâches**	**Techniques**	**Technologies**[1]
Math'x, Seconde, 2005	Définition d'équations équivalentes	Résoudre graphiquement f(x)=k	- Placer k sur l'axe (Ox) - Repérer tous les points de la courbe d'ordonnée k. - lire leurs abscisses	présentée dans le chapitre « fonctions » : - x est l'antécédent de k par f - recherche graphique des antécédents
		Résoudre graphiquement f(x)=g(x)	- Repérer les points communs aux deux courbes C_f et C_g. - Lire les abscisses de ces deux points.	présentée dans le chapitre « fonctions » : x est l'abscisse du point d'intersection des courbes C_f et C_g.
		Les équations telles qu'après développement et simplification on obtient une équation de degré	- Développer, - Réduire - Résoudre une équation de degré 1	Propriété 1 : équivalence des équations par transformations.

1 Pour les technologies, nous ne préciserons celles qui sont relatives aux tâches qui interviennent dans les techniques et qui ont fait l'objet d'étude au collège comme la cas de : factoriser, réduire, développer, résoudre une équation de degré 1.

		1		
		Les équations telles qu'après développement et simplification on n'obtient pas une équation de degré 1.	- Se ramener à un produit nul en factorisant ou à un quotient égal à 0 en réduisant au même dénominateur. - Appliquer la propriété du produit nul ou du quotient nul. - résoudre les équations de degré 1.	En plus des technologies sur la factorisation, réduction et résolution des équations de degré 1 : Propriété 1 : équivalence des équations par transformations. Propriété 2 : produit nul et quotient nul
		Les équations du type $ax^2+bx+c=0$ dont une racine est un nombre entier et l'autre est quelconque et qui ne s'y prête pas à une factorisation immédiate par l'identité remarquable	- Représenter la courbe de la fonction trinôme - Résoudre graphiquement l'équation - Vérifier algébriquement qu'au moins l'une des deux valeurs est solution de l'équation - Factoriser (une indication est donnée pour factoriser) - Résoudre une équation produit nul.	
Repère, Seconde, 2004	Définition de résoudre une	résoudre les équations de la forme $P_1(x) \times Q_1(x)=0$	- Appliquer la règle qu'un produit de facteur est nul si l'un des facteurs est nul - Résoudre deux équations de degré 1.	Théorème équation produit

	équation	résoudre les équations de la forme $R_1^2(x)$=a	si a est strictement positif alors l'équation a deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ si a est nul alors l'équation admet une seule solution 0 si a est strictement négatif alors l'équation n'admet pas de solution.	Définition de la racine carrée
		Résoudre les équations de la forme $P_2(x) = Q_2(x)$ où les polynômes sont choisis de sorte qu'on puisse les factoriser avec les techniques vues au collège.	- Transposer tous les termes dans un même membre de l'équation - Factoriser ce membre. - Résoudre des équations de degré 1 - Conclure	Théorème équation produit
		Résoudre les équations qui se ramènent à de la forme $\frac{A(x)}{B(x)}$ où $A(x)$ et $B(x)$ sont des polynômes de degré inférieure ou égale à 2	- chercher les valeurs interdites de l'équation - transposer tous les termes dans un même mebre de l'équation. - Réduire au même dénominateur ce même membre. - Factoriser le numérateur - Résoudre $A(x)$=0 - Conclure en vérifiant que les solutions trouvées ne sont pas des valeurs interdites.	Propriété équation quotient.
Hyperbole, Seconde, 2004	Définition équation	Résoudre graphiquement $f(x)$=k	- Placer k sur l'axe (Ox) - Tracer la droite d'équation y=k. - lire les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec cette droite.	Fournie dans le chapitre « fonctions » : - interpréter k comme une fonction constante dont la courbe est y=k - recherche graphique des

				abscisses des points d'intersection
		Résoudre graphiquement f(x)=g(x)	- Repérer les points communs aux deux courbes C_f et C_g. - Lire les abscisses de ces deux points.	Fournie dans le chapitre « fonctions » : x est l'abscisse du point d'intersection des courbes C_f et C_g.
		Les équations qui se ramènent aux équations de degré 1	- Se ramener à un produit nul en factorisant ou à un quotient égal à 0 en réduisant au même dénominateur. - Appliquer la propriété du produit nul ou du quotient nul. - résoudre les équations de degré 1. OU - Développer, - Réduire - Résoudre une équation de degré 1	Règle du produit nul et du quotient nul

ANNEXE 2 : ALGEBRE, CLASSE DE MATHEMATIQUES, HACHETTE, 1948.

Si les polynomes ne contiennent pas de termes dont les degrés décroissent régulièrement d'une unité quand on passe d'un terme au suivant, on laisse des blancs pour avoir une disposition claire. Telle est par exemple l'opération :

$$\begin{array}{rrrrr}
x^3 & & -3x & +2 & \\
x & -1 & & & \\
\hline
x^4 & & -3x^2 & +2x & \\
 & -x^3 & & +3x & -2 \\
\hline
x^4 & -x^3 & -3x^2 & +5x & -2
\end{array}$$

Enfin, on peut ordonner les polynomes par rapport aux puissances croissantes de la variable. Telle est par exemple l'opération :

$$\begin{array}{rrrrrr}
1 & -2x & +x^2 & -4x^3 & & \\
7 & -3x & +x^2 & & & \\
\hline
7 & -14x & +7x^2 & -28x^3 & & \\
 & -3x & +6x^2 & -3x^3 & +12x^4 & \\
 & & +x^2 & -2x^3 & +x^4 & -4x^5 \\
\hline
7 & -17x & +14x^2 & -33x^3 & +13x^4 & -4x^5.
\end{array}$$

86. **Degré du polynome produit.** — Considérons les deux polynomes A et B, réduits et ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de la variable x :

$$A \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n,$$
$$B \equiv b_0x^p + b_1x^{p-1} + ... + b_p.$$

Si l'on multiplie tous les termes de A par b_0x^p, le terme de plus haut degré trouvé est $a_0b_0x^{n+p}$. Si l'on multiplie ensuite les termes de A par b_1x^{p-1} le terme de plus haut degré trouvé est ab_1x^{n+p-1}; ce degré est inférieur à $n + p$ et il en est de même si l'on continue l'opération.

Il en résulte que le terme $a_0b_0x^{n+p}$ est seul de son degré et qu'il n'existe dans le produit aucun terme semblable à ce terme. Il ne peut donc pas disparaître par réduction.

Nous énoncerons :

Théorème. — Le produit de deux polynomes en x de degrés respectifs n et p est un polynome de degré $n + p$. Le terme de plus haut degré du produit est, sans réduction possible, le produit des termes de plus haut degré des polynomes donnés.

Un raisonnement tout analogue peut être fait sur les termes de plus bas degré des polynomes donnés.

Ordonnons ces polynomes par rapport aux puissances croissantes de la variable x.

$$A \equiv a_kx^k + a_{k+1}x^{k+1} + ... + a_nx^n$$
$$B \equiv b^hx^h + b_{h+1}x^{h+1} + ... + b_px^p.$$

Si k et h sont nuls les polynomes ont des termes constants. Nous supposons évidemment a_k et b_h non nuls; n et p sont supérieurs respectivement à k et à h.

Si l'on multiplie tous les termes de A par b_hx^h, le terme de plus bas degré trouvé est $a_kb_hx^{k+h}$. Si l'on multiplie ensuite les termes de A par $b_{h+1}x^{h+1}$, le terme de plus bas degré trouvé est $a_kb_{h+1}x^{k+h+1}$; ce degré est supérieur à $h + k$ et il en est de même si on continue l'opération.

Il en résulte que le terme de plus bas degré du produit est $a_kb_hx^{k+h}$ et qu'il n'existe dans le produit aucun terme qui lui soit semblable.

Nous énoncerons :

Théorème. — Le terme de plus bas degré du produit de deux polynomes en x est le produit, sans réduction possible, des termes de plus bas degré des polynomes donnés.

Il en résulte que le produit de deux polynomes en x contient au moins deux termes.

87. **Condition pour qu'un produit de deux polynomes soit identiquement nul.**

Il est évident que si l'un d'eux est identiquement nul, le produit sera nul.

D'autre part, il résulte des théorèmes du n° 86 que, si aucun des deux polynomes n'est identiquement nul, le produit ne le sera pas non plus puisqu'il aura au moins deux termes non nuls.

Nous pouvons donc énoncer :

Théorème. — Pour qu'un produit de deux polynomes soit identiquement nul il faut et il suffit que l'un d'eux au moins le soit.

REMARQUE. — De proche en proche, on pourra faire le produit de **3**, de **4**, ... de n polynomes et énoncer des théorèmes analogues à ceux de n^os 86 et 87.

88. **Unicité des opérations.** — Dans tout ce qui précède, nous avons calculé des polynomes dont la valeur numérique était, soit la somme algébrique, soit le produit des valeurs numériques de plusieurs autres polynomes.

Ces résultats sont *uniques* car d'autres polynomes (sommes ou produits) prendraient les mêmes valeurs numériques pour toutes valeurs des lettres donc seraient identiques à ceux obtenus par les règles énoncées ci-dessus (75).

ANNEXE 3 : LES THEOREMES-EN-ACTE GLOBAUX

Les 5 TeA globaux du trait « Signe dans mouvement »

SigneCorrect : **Traitement correct du signe de l'argument.**

ValeurAbsolue : **Changement du signe de l'argument si et seulement si il est négatif.**

ValeurAbsoluePartielleM : **Changement du signe de l'argument si et seulement si « il est négatif et sa position à l'origine est multiplicative » ou si « sa position à l'origine est additive ».**

ConservationSigne : **Jamais de changement du signe l'argument.**

ChangementSigne : **Toujours changement du signe l'argument**.

Les 4 TeA globaux du trait « Sens dans mouvement »

SensCorrect : **Traitement correct du sens de l'inégalité.**

SensUnifié : **Changement du sens de l'inégalité si et seulement si le signe de l'argument est négatif.**

ConservationSens : **Jamais de changement du sens de l'inégalité.**

ChangementSens : **Toujours changement du sens de l'inégalité.**

Les 5 TeA globaux du trait « Opérateur dans mouvement »

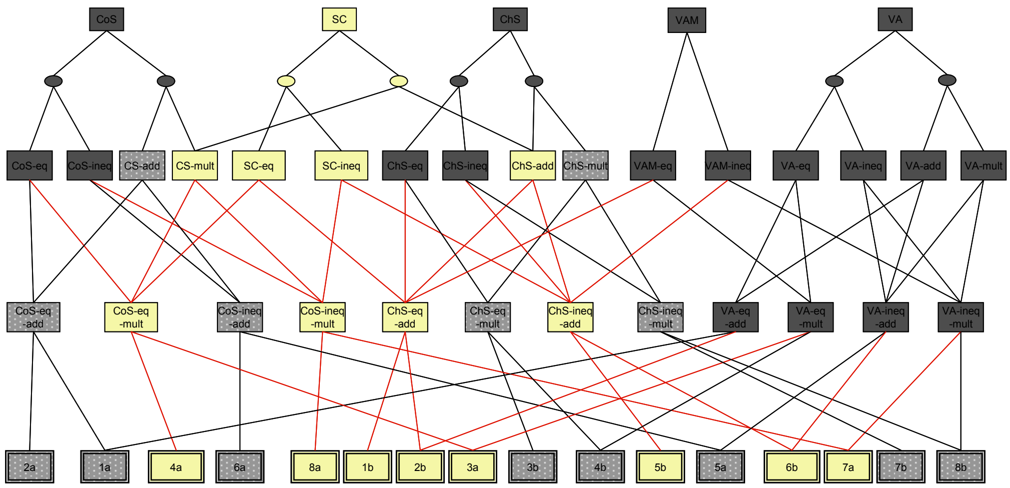
OperateurCorrect : **Traitement correct de l'opérateur.**

OperateurUnifieA : **La position finale de l'argument est toujours additive.**
($a+x=b \rightarrow x=b\pm a$ $ax=b \rightarrow x=b\pm a$ $x/a=b \rightarrow x=b\pm a$)

OperateurUnifieMN : **La position finale de l'argument est toujours multiplicative au numérateur**
($a+x=b \rightarrow x=ab$ $ax=b \rightarrow x=ab$ $x/a=b \rightarrow x=ab$)

OperateurUnifieMD : **La position finale de l'argument est toujours multiplicative au dénominateur**
($a+x=b \rightarrow x=b/a$ $ax=b \rightarrow x=b/a$ $x/a=b \rightarrow x=b/a$)

ANNEXE 4 : LES TREILLIS DES THEOREMES-EN-ACTE DU TRAIT « SIGNE ».



Noms des théorèmes en acte globaux TeA

Sc : SigneCorrect (Traitement correct du signe de l'argument).
VA : ValeurAbsolue
VAM : ValeurAbsoluePartielleM
CoS : ConservationSigne
ChS : ChangementSigne

Théorèmes en actes sur des domaines plus restreints. TeA-x-y-z

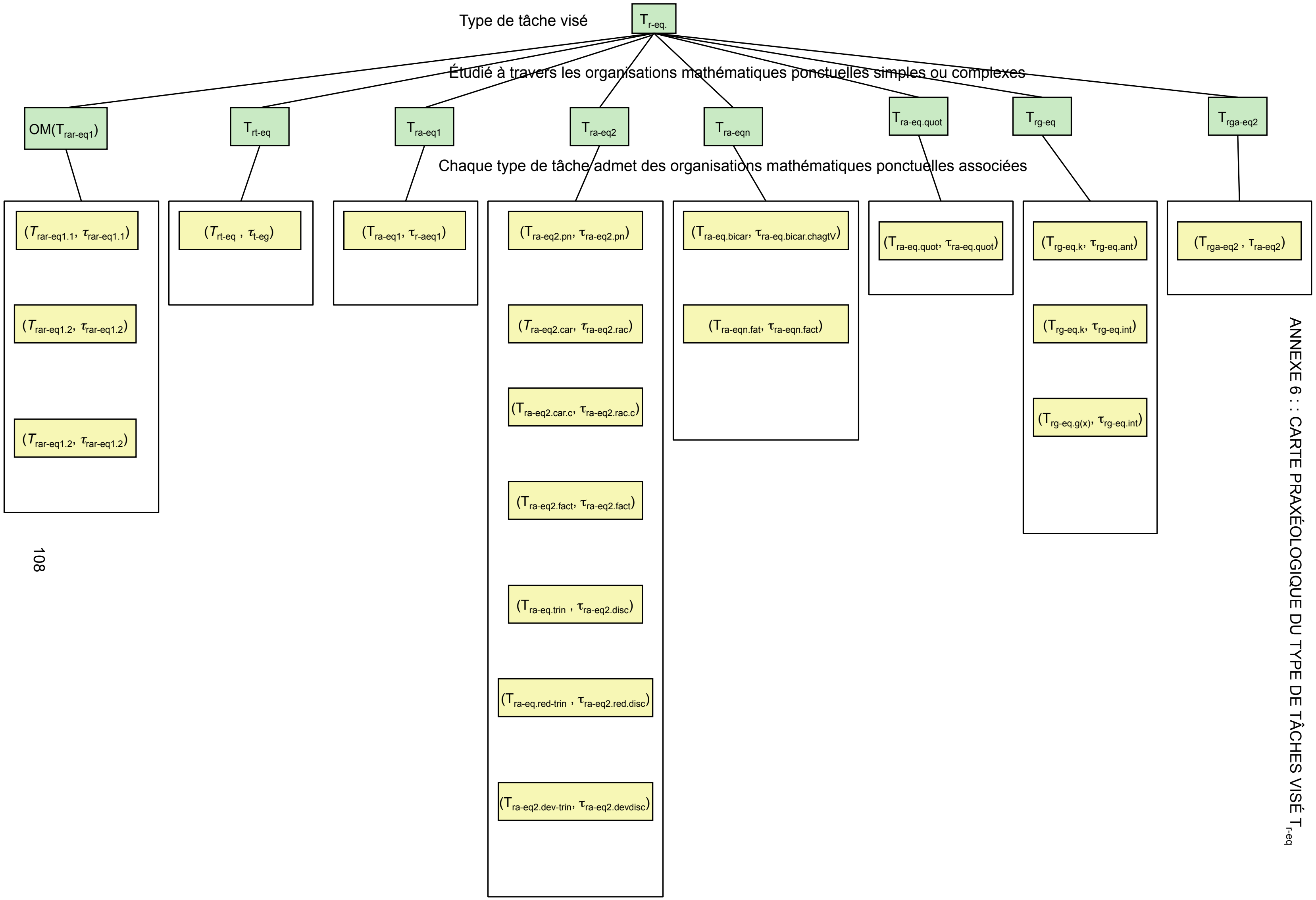
x, y et z précisent le contexte parmi les valeurs suivantes :

- type de relation : Eq (pour équation) ou Ineq (pour inéquation) ou vide.
- position d'origine de l'argument : Add (pour additif), Mult (pour multiplicatif), Num (pour numérateur) ou Deno (pour dénominateur).
- signe de l'argument : plus ou moins.

ANNEXE 5 : REPARTITION DES TeA RELATIFS AU TRAIT SIGNE DANS LE GENRE DE TACHE MOUVEMENT POUR UNE EXPERIMENTATION SUR 3186 ELEVES

TeA diagnostiqués auprès de 3186 élèves	**% E**	**% C**	**Nbre**
SigneCorrect	8.1	8.8	**258**
SigneCorrect-Equation	**15.7**	**17.0**	**500**
SigneCorrect-Inequation	**3.7**	**4.0**	**119**
ChangementSigne-Additif	**22.8**	**24.7**	**726**
ConservationSigne-Multiplicatif	**0.6**	**0.6**	**18**
ValeurAbsolue-Equation	0.0	0.0	1
ValeurAbsolue-Additif	0.1	0.1	3
ValeurAbsolue-Multiplicatif	0.6	0.7	20
ValeurAbsoluePartielleM-Equation	4.2	4.6	134
ConservationSigne-Additif	0.3	0.3	8
ChangementSigne-Equation	0.2	0.2	7
ChangementSigne-Inequation	0.0	0.0	1
ChangementSigne-Equation- Additif	**21.3**	**23.1**	**679**
ChangementSigne-Inequation- Additif	**4.8**	**5.2**	**153**
ConservationSigne-Equation-Multiplicatif	**2.5**	**2.7**	**79**
ConservationSigne-Inequation-Multiplicatif	**0.2**	**0.2**	**7**
ValeurAbsolue-Equation-Additif	1.9	2.1	61
ValeurAbsolue-Inequation -Additif	1.8	1.9	56
ValeurAbsolue-Equation-Multiplicatif	0.5	0.6	17
ValeurAbsolue-Inequation -Multiplicatif	1.9	2.1	61
ConservationSigne-Equation-Additif	0.5	0.5	16
ConservationSigne-Inequation -Additif	0.6	0.6	18

Répartition des TeA relatifs au « Signe dans Mouvement » par niveau de profondeur du contexte. %E désigne le pourcentage des TeA par rapport au nombre total d'élèves, %C désigne le pourcentage des TeA par rapport au nombre total de TeA. En gras, les TeA corrects.



ANNEXE 6 : : CARTE PRAXÉOLOGIQUE DU TYPE DE TÂCHES VISÉ $T_{r\text{-}eq}$

108